ZAGADNIENIA DO EGZAMINU MAGISTERSKIEGO

Na egzaminie magisterskim student powinien:
1) omówić wyniki zawarte w pracy magisterskiej posługując się swobodnie pojęciami i twierdzeniami zamieszczonymi w pracy oraz bezpośrednio związanymi z pracą,
2) wykazać się dobrą znajomością pojęć i twierdzeń ujętych w następujących zagadnieniach:

Analiza rzeczywista

1. Definicje ciała i σ-ciała zbiorów. Porównanie pojęć i przykłady.
2. Definicje i własności miary nieujemnej na σ-ciele i ciele zbiorów.
3. Określenie rodziny zbiorów borelowskich w R^k i jej równoważne definicje.
4. Definicje i własności miary zewnętrznej i miary zewnętrznej Lebesgue'a.
5. Konstrukcja miary z miary zewnętrznej. Twierdzenie Carathéodory'ego.
6. Konstrukcja miary Lebesgue'a poprzez warunek Carathéodory'ego.
7. Twierdzenie o rozszerzaniu miary określonej na ciele do miary na σ-ciele.
8. Definicja zupełności miary. Zupełność miary Lebesgue'a.
9. Definicja niezmienniczości miary na przesunięcia. Miara Lebesgue'a.
10. Funkcje mierzalne, mierzalne w sensie Lebesgue'a i funkcje borelowskie.
11. Operacje na funkcjach mierzalnych. Złożenie funkcji mierzalnych.
12. Zbieżność prawie wszędzie i według miary ciągu funkcji mierzalnych.
13. Definicja całki względem danej miary nieujemnej.
14. Twierdzenie Lebesgue'a o całkowaniu ciągów monotonicznych.
15. Twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej.

Analiza zespolona

1. Pojęcia płaszczyzny zespolonej i domkniętej płaszczyzny zespolonej.
2. Granica i ciągłość funkcji zespolonej zmiennej rzeczywistej.
3. Pochodna i całka funkcji zespolonej zmiennej rzeczywistej.
4. Krzywe na płaszczyźnie zespolonej.
5. Definicja pochodnej zespolonej. Warunki konieczny i wystarczający na jej istnienie.
6. Definicje funkcji różniczkowalnej, funkcji analitycznej i funkcji całkowitej.
7. Definicja funkcji wykładniczej lub wybranej funkcji trygonometrycznej określonych w dziedzinie zespolonej. Porównanie własności wybranej funkcji określonej w dziedzinach rzeczywistej i zespolonej.
8. Całki krzywoliniowe zespolone i metody ich obliczania.
9. Twierdzenie całkowe Cauchy'ego dla obszarów jednospójnego i wielospójnego.
10. Wzór całkowy Cauchy'ego i wybrane jego konsekwencje.
11. Rozwinięcie funkcji analitycznej w szereg Taylora i jego związek z różniczkowalnością funkcji.
12. Rozwinięcie funkcji analitycznej w szereg Laurenta.

13. Punkt regularny oraz punkt osobliwy odosobniony. Klasyfikacja punktów osobliwych odosobnionych.
14. Residuum funkcji. Twierdzenie o residuach.

Analiza funkcjonalna

1. Definicje przestrzeni unormowanej i przestrzeni Banacha.
2. Definicja przestrzeni dualnej do przestrzeni unormowanej. Zupełność przestrzeni dualnej.
3. Definicje przestrzeni unitarnej i przestrzeni Hilberta.
4. Definicja przestrzeni (algebry) operatorów liniowych ograniczonych na przestrzeniach Banacha i Hilberta.
5. Podstawowe przykłady przestrzeni Banacha i Hilberta.
6. Przestrzenie dualne do l_p , L_p .
7. Twierdzenie Hahna-Banacha (w tym w wersji dla przestrzeni unormowanych).
8. Twierdzenie Riesza o najlepszej aproksymacji w przestrzeni Hilberta.
9. Twierdzenie o rzucie ortogonalnym w przestrzeni Hilberta.
10. Twierdzenie Riesza o postaci funkcjonałów w przestrzeni Hilberta.
11. Twierdzenie Grama-Schmidta o ortogonalizacji w przestrzeni Hilberta.
12. Twierdzenie o szeregach Fouriera w przestrzeni Hilberta.
13. Twierdzenie Banacha-Steinhausa o zbieżności jednostajnej.
14. Twierdzenie Banacha o operatorze odwrotnym.

Topologia

1. Definicja i przykłady przestrzeni topologicznej; różne sposoby wprowadzania topologii w zbiorze; topologia generowana przez metrykę; baza topologii.
2. Domknięcie, wnętrze i brzeg zbioru w przestrzeni topologicznej; zbiory gęste, nigdziegęste i brzegowe; zbiory borelowskie, pierwszej kategorii i drugiej kategorii.
3. Topologia podprzestrzeni; suma przestrzeni topologicznych; przestrzeń ilorazowa, przykłady; topologia w iloczynie kartezjańskim przestrzeni topologicznych
4. Aksjomaty oddzielania i związki między nimi; przykłady. Twierdzenie Urysohna.
5. Przestrzenie topologiczne spójne oraz łukowo spójne; składniki spójności, zastosowania.
6. Zwartość; charakteryzacja zbiorów zwartych w przestrzeniach metrycznych; normalność przestrzeni zwartych Hausdorffa.
7. Grupa podstawowa przestrzeni topologicznej i jej własności; twierdzenia o punkcie stałym.

Równania różniczkowe

1. Twierdzenie Peano o istnieniu rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego.
2. Twierdzenie Picarda o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego.
3. Twierdzenie o ciągłej zależności rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego od warunków początkowych.

4. Równania o zmiennych rozdzielonych. Przykłady zastosowań równań tego typu w fizyce.
5. Równanie liniowe niejednorodne pierwszego rzędu.
6. Definicja układu fundamentalnego rozwiązań równania liniowego jednorodnego rzędu *n*. Twierdzenie o istnieniu takiego układu.
7. Wyznacznik Wrońskiego dla rozwiązań równania liniowego jednorodnego rzędu *n.* Wzór Liouville'a.
8. Metoda Eulera wyznaczania układu fundamentalnego rozwiązań równania liniowego jednorodnego rzędu *n* o stałych współczynnikach lub układu równań liniowych o stałych współczynnikach.
9. Metoda uzmienniania stałych wyznaczania rozwiązania ogólnego równania liniowego niejednorodnego rzędu *n*.
10. Stabilność w sensie Lapunowa rozwiązania układu równań różniczkowych pierwszego rzędu.

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

1. Rozkłady łączne, brzegowe i warunkowe zmiennych losowych.
2. Warunki niezależności zmiennych losowych.
3. Idea regresji pierwszego i drugiego rodzaju.
4. Zbieżność prawie pewna oraz mocne prawo wielkich liczb.
5. Zbieżność według prawdopodobieństwa oraz słabe prawo wielkich liczb.
6. Zbieżność według rozkładu oraz centralne twierdzenie graniczne.
7. Rodzaje błędów przy testowaniu hipotez statystycznych.
8. Wybrane testy zgodności i niezależności.
9. Wybrane testy parametryczne dla rozkładów normalnych.

Analiza matematyczna

1. Pojęcia pola skalarnego i wektorowego (do wyboru). Gradient, dywergencja, rotacja, potencjał pola.
2. Całka krzywoliniowa niezorientowana. Zamiana całki krzywoliniowej niezorientowanej na całkę oznaczoną.
3. Całka krzywoliniowa zorientowana. Zamiana całki krzywoliniowej zorientowanej na całkę oznaczoną.
4. Twierdzenie Greena oraz jego zastosowanie do obliczania pola obszaru.
5. Pole potencjalne, niezależność całki krzywoliniowej zorientowanej od drogi całkowania.
6. Całka powierzchniowa niezorientowana. Zamiana całki powierzchniowej niezorientowanej na całkę podwójną.
7. Całka powierzchniowa zorientowana. Zamiana całki powierzchniowej zorientowanej na całkę podwójną. Strumień pola wektorowego.
8. Zastosowania całki powierzchniowej niezorientowanej i zorientowanej (do wyboru).

9. Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego.
10. Twierdzenie Stokesa.

Zagadnienia do egzaminu magisterskiego zostały jednomyślnie zaakceptowane przez Zespół Programowy kierunku Matematyka na posiedzeniu w dniu 28.09.2023 r.