SYLABUS

DOTYCZY CYKLU KSZTAŁCENIA *2022-2024*
(skrajne daty)
Rok akademicki 2022/2023

1. PODSTAWOWE INFORMACJE O PRZEDMIOCIE

Nazwa przedmiotu	Analiza rzeczywista
Kod przedmiotu*	
Nazwa jednostki prowadzącej kierunek	Kolegium Nauk Przyrodniczych
Nazwa jednostki realizującej przedmiot	Kolegium Nauk Przyrodniczych Instytut Matematyki
Kierunek studiów	Matematyka
Poziom studiów	studia II stopnia
Profil	ogólnoakademicki
Forma studiów	stacjonarne
Rok i semestr studiów	rok I, semestr 1
Rodzaj przedmiotu	kierunkowy
Język wykładowy	polski
Koordynator	dr hab. Rostislav Hryniv, prof. UR
Imię i nazwisko osoby prowadzącej / osób prowadzących	dr hab. Rostislav Hryniv, prof. UR, dr Svietlana Micheva-Kamińska

** - opcjonalnie, zgodnie z ustaleniami w Jednostce*

1.1. Formy zajęć dydaktycznych, wymiar godzin i punktów ECTS

Semestr (nr)	Wykł.	Ćw.	Konw.	Lab.	Sem.	ZP	Prakt.	Inne (jakie?)	**Liczba pkt ECTS**
1	30	30							6

1.2. Sposób realizacji zajęć

☒ zajęcia w formie tradycyjnej
☒ zajęcia realizowane z wykorzystaniem metod i technik kształcenia na odległość

1.3 Forma zaliczenia przedmiotu (z toku) (egzamin, zaliczenie z oceną, zaliczenie bez oceny)

Ćwiczenia audytoryjne - zaliczenie na ocenę
Wykład – egzamin

2. WYMAGANIA WSTĘPNE

Podstawowa wiedza i umiejętności z zakresu analizy matematycznej, wstępu do logiki i teorii mnogości oraz topologii.

3. CELE, EFEKTY UCZENIA SIĘ , TREŚCI PROGRAMOWE I STOSOWANE METODY DYDAKTYCZNE

3.1 Cele przedmiotu

C1	Przedstawienie i przyswojenie przez studentów zagadnień dotyczących: teorii przestrzeni z miarą; funkcji mierzalnych; zbieżności w przestrzeniach z miarą; teorii całki po dowolnej mierze.
C2	Wyposażenie studentów w niezbędne narzędzia do dalszego kształcenia matematycznego w zakresie teorii prawdopodobieństwa.
C3	Wyposażenie studentów w niezbędne narzędzia do dalszego kształcenia matematycznego w zakresie analizy funkcjonalnej.

3.2 EFEKTY UCZENIA SIĘ DLA PRZEDMIOTU

EK (efekt uczenia się)	Treść efektu uczenia się zdefiniowanego dla przedmiotu	Odniesienie do efektów kierunkowych
EK_01	Student ma pogłębioną wiedzę z zakresu analizy rzeczywistej, zna jej najważniejsze twierdzenia i potrafi umiejscowić tę wiedzę w rozwoju matematyki	K_W01
EK_02	Student zna podstawowe metody dowodzenia właściwe dla analizy rzeczywistej	K_W02
EK_03	Student potrafi konstruować rozumowania matematyczne z zakresu analizy rzeczywistej dowodzić twierdzenia i obalać hipotezy poprzez odpowiednie konstrukcje i dobór kontrprzykładów, potrafi sprawdzać poprawność wnioskowań	K_U02; K_U03
EK_04	Student zna konstrukcję miary i całki Lebesgue'a i ich zastosowanie w innych zagadnieniach teoretycznych i praktycznych	K_U01; K_U04
EK_05	Student jest gotów do formułowania pytań oraz wyrażania własnych opinii dotyczących zagadnień analizy rzeczywistej.	K_K01

3.3 Treści programowe

A. Problematyka wykładu

Treści merytoryczne
Rodziny podzbiorów dowolnego ustalonego zbioru (pierścienie, σ-pierścienie, ciała, σ-ciała, rodziny multiplikatywne i monotoniczne). Rodziny generowane przez ustaloną rodzinę zbiorów. Pojęcie zbiorów borelowskich. Hierarchia podrodzin rodziny zbiorów borelowskich. Miara nieujemna, przestrzeń miarowa – definicja i przykłady. Miara skończona, σ-skończona i zupełna. Własności miary.

Miara zewnętrzna – definicja, przykłady i własności. Miara zewnętrzna generowana przez dowolną miarę. Twierdzenie Caratheodory'ego oraz twierdzenie o rozszerzaniu miar. Miara zewnętrzna Lebesgue'a. Miara Lebesgue'a w R i R^d oraz jej własności. Regularność miary Lebesgue'a. Zbiory mierzalne w sensie Lebesgue'a. Zbiory miary Lebesgue'a zero (w szczególności zbiór Cantora). Zbiory niemierzalne – twierdzenie Vitalego. Funkcje równe prawie wszędzie. Funkcje mierzalne – definicja, przykłady i własności. Działania na funkcjach mierzalnych. Funkcje borelowskie. Istnienie funkcji niemierzalnych. Zbieżność ciągów funkcyjnych w przestrzeniach miarowych. Zbieżność prawie wszędzie, według miary i zbieżność asymptotyczna. Własności zbieżności prawie wszędzie i według miary; przykłady. Ciągi Cauchy'ego prawie wszędzie i według miary. Twierdzenia Jegorowa, Łuzina i Riesza. Zbieżność prawie jednostajna. Pojęcie funkcji charakterystycznej i funkcji prostej. Całka z funkcji prostej nieujemnej po dowolnej mierze – definicja, przykłady i własności. Funkcje mierzalne nieujemne. Aproksymacja funkcji mierzalnych nieujemnych przez funkcje proste. Całka z funkcji mierzalnej nieujemnej – definicja, własności i przykłady. Lemat Fatou i twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej oraz wynikające z nich wnioski. Całka z funkcji o wartościach rzeczywistych i zespolonych – definicja, własności i przykłady. Funkcje całkowalne. Przestrzenie L^p. Twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej. Całka Lebesgue'a a całka Riemanna. Twierdzenie Lebesgue'a o rozkładzie miar. Twierdzenie Radona-Nikodyma. Miara i całka w produkcie kartezjańskim. Twierdzenia Tonellego i Fubiniego.

B. Problematyka ćwiczeń audytoryjnych

Treści merytoryczne
Repetytorium z algebry zbiorów, teorii mocy, topologii przestrzeni metrycznych. Pierścień, σ-pierścień, ciało, σ-ciało, rodziny multiplikatywne i monotoniczne - zadania. Rodziny generowane przez ustaloną rodzinę zbiorów. Zbiory otwarte i domknięte, zbiory typu G_δ, F_σ, G_δσ, F_(σδ,) … Zbiory borelowskie. Miara nieujemna – zadania. Badanie skończoności, σ-skończoności i zupełności miar. Miara zewnętrzna – zadania. Twierdzenie Caratheodory'ego i jego zastosowanie do wyznaczania zbiorów mierzalnych w sensie Caratheodory'ego.

Miara zewnętrzna Lebesgue'a a miara Lebesgue'a – zadania. Zbiory mierzalne i niemierzalne w sensie Lebesgue'a. Funkcje mierzalne i borelowskie– zadania. Badanie zbieżności ciągów funkcyjnych (zbieżność wszędzie, prawie wszędzie, jednostajna i według miary). Obliczanie całek z funkcji charakterystycznych i prostych nieujemnych po dowolnej mierze. Obliczanie całek z funkcji mierzalnych nieujemnych po dowolnej mierze. Zastosowanie twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej do obliczania całek. Obliczanie całek o wartościach rzeczywistych i zespolonych. Funkcje całkowalne w sensie Riemanna i Lebesgue'a – zadania. Miara produktowa – zadania. Obliczanie całek w produkcie kartezjańskim. Sprawdzenie nabytych wiadomości i umiejętności – kolokwium.

3.4 Metody dydaktyczne

Wykład: wykład problemowy

Ćwiczenia audytoryjne: wyjaśnianie, komentowanie i interpretacja zagadnień przedstawionych na wykładzie, rozwiązywanie zadań, omawianie przykładów i kontrprzykładów, dyskusja.

4. METODY I KRYTERIA OCENY

4.1 Sposoby weryfikacji efektów uczenia się

Symbol efektu	Metody oceny efektów uczenia się (np.: kolokwium, egzamin ustny, egzamin pisemny, projekt, sprawozdanie, obserwacja w trakcie zajęć)	Forma zajęć dydaktycznych (w, ćw, …)
EK_01	obserwacja w trakcie zajęć, egzamin ustny	w.
EK_02	obserwacja w trakcie zajęć, egzamin ustny	w.
EK_03	kolokwium	ćw.
EK_04	kolokwium	ćw.
EK_05	obserwacja w trakcie zajęć, egzamin ustny	w., ćw.

4.2 Warunki zaliczenia przedmiotu (kryteria oceniania)

Oceny (minimum dostateczne) z kolokwiów, aktywny udział w zajęciach, ocena z egzaminu.

5. CAŁKOWITY NAKŁAD PRACY STUDENTA POTRZEBNY DO OSIĄGNIĘCIA ZAŁOŻONYCH EFEKTÓW W GODZINACH ORAZ PUNKTACH ECTS

Forma aktywności	Średnia liczba godzin na zrealizowanie aktywności
Godziny kontaktowe wynikające z harmonogramu studiów	60
Inne z udziałem nauczyciela (udział w konsultacjach, egzaminie)	5
Godziny niekontaktowe – praca własna studenta (przygotowanie do zajęć, egzaminu, napisanie referatu itp.)	90
SUMA GODZIN	155
SUMARYCZNA LICZBA PUNKTÓW ECTS	6

** Należy uwzględnić, że 1 pkt ECTS odpowiada 25-30 godzin całkowitego nakładu pracy studenta.*

6. PRAKTYKI ZAWODOWE W RAMACH PRZEDMIOTU

wymiar godzinowy	Nie dotyczy
zasady i formy odbywania praktyk	Nie dotyczy

7. LITERATURA

Literatura podstawowa:

1. P. R. Halmos, Measure Theory, Van Nostrand Reinhold, New York 1950.
2. S. Hartman, J. Mikusiński, Teoria miary i całki Lebesgue'a, PWN, Warszawa 1957.
3. W. Rudin, Analiza rzeczywista i zespolona, Wydawnictwa Naukowe PWN, Warszawa 2009.
4. A. Birkholc, Analiza matematyczna. Funkcje wielu zmiennych, Wydawnictwa Naukowe PWN, Warszawa 2001.
5. A. E. Taylor, General Theory of Functions and Integration, Dover Publications INC, New York 1985.
6. F. M. Filipczak, Teoria miary i całki. Skrypt ze zbiorem zadań, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 1997.
7. J. Niewiarowski, Zadania z teorii miary, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 1999.

Literatura uzupełniająca:

1. S. Łojasiewicz, Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych, PWN, Warszawa 1973.
2. R. Sikorski, Funkcje rzeczywiste, t.1., PWN, Warszawa 1958.
3. J. Muszyński, Teoria całki. Miara i całka, PWN, Warszawa 1990.
4. K. Kuratowski, Wstęp do teorii mnogości i topologii, Wydawnictwa Naukowe PWN, Warszawa 2004.
5. J. Krzyszkowski, E. Turdza, Elementy topologii, Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej, Kraków 2000.
6. H. Rasiowa, Wstęp do matematyki współczesnej, Wydawnictwa Naukowe PWN, Warszawa 2007.

Akceptacja Kierownika Jednostki lub osoby upoważnionej