

**SYLABUS**  
**dotyczy cyklu kształcenia 2023/2024–2026/2027**  
*(skrajne daty)*  
 Rok akademicki 2023/24

**1. Podstawowe informacje o przedmiocie**

Nazwa przedmiotu	<b>Matematyka</b>
Kod przedmiotu*	
Nazwa jednostki prowadzącej kierunek	Kolegium Nauk Przyrodniczych
Nazwa jednostki realizującej przedmiot	Kolegium Nauk Przyrodniczych
Kierunek studiów	Optometria
Poziom studiów	studia pierwszego stopnia, inż.
Profil	ogólnoakademicki
Forma studiów	stacjonarne
Rok i semestr/y studiów	rok I, semestr 1, 2
Rodzaj przedmiotu	podstawowy
Język wykładowy	polski
Koordinator	<b>dr Anna Szpila</b>
Imię i nazwisko osoby prowadzącej / osób prowadzących	dr Anna Szpila; dr Edyta Trybucka; mgr Patryk Rela

\* –opcjonalnie, zgodnie z ustaleniami w Jednostce

**1.1. Formy zajęć dydaktycznych, wymiar godzin i punktów ECTS**

Semestr (nr)	Wykł.	Ćw.	Konw.	Lab.	Sem.	ZP	Prakt.	Inne (jakie?)	Liczba pkt. ECTS
1	30	30							5
2	30	30							5

**1.2. Sposób realizacji zajęć**

zajęcia w formie tradycyjnej

zajęcia realizowane z wykorzystaniem metod i technik kształcenia na odległość

**1.3. Forma zaliczenia przedmiotu (z toku) (egzamin, zaliczenie z oceną, zaliczenie bez oceny)**

Wykład – egzamin, semestr 1, 2

Ćwiczenia – zaliczenie z oceną

**2. Wymagania wstępne**

Znajomość matematyki szkolnej na poziomie matury podstawowej.
---

### 3. Cele, efekty uczenia się, treści programowe i stosowane metody dydaktyczne

#### 3.1. Cele przedmiotu

C <sub>1</sub>	Zapoznanie z podstawowymi pojęciami z zakresu algebry liniowej, geometrii analitycznej, rachunku różniczkowego i całkowego oraz teorii równań różniczkowych.
C <sub>2</sub>	Opanowanie podstawowych metod i technik stosowanych w algebrze liniowej i analizie matematycznej.
C <sub>3</sub>	Wyćwiczenie umiejętności stosowania aparatu matematycznego z zakresu algebry liniowej i analizy matematycznej niezbędnego do opisu zagadnień i rozwiązywania problemów fizycznych i technicznych.

#### 3.2. Efekty uczenia się dla przedmiotu

EK (efekt uczenia się)	Treść efektu uczenia się zdefiniowanego dla przedmiotu	Odniesienie do efektów kierunkowych
EK_01	student zna i rozumie klasyczne pojęcia z analizy matematycznej oraz z algebry liniowej i geometrii analitycznej;	K_Wo1
EK_02	student zna i rozumie podstawowe techniki obliczeniowe stosowane w analizie matematycznej oraz w algebrze liniowej i geometrii analitycznej;	K_Wo1
EK_03	student zna przykłady zastosowań aparatu matematycznego właściwego dla analizy matematycznej oraz algebry liniowej i geometrii analitycznej do opisu zagadnień fizycznych i technicznych;	K_Wo1
EK_04	student działa na liczbach zespolonych i wykorzystuje liczby zespolone do opisu różnych zjawisk;	K_Uo1; K_Uo7
EK_05	student działa na macierzach, oblicza wyznaczniki, rozwiązuje układy równań liniowych, modeluje rzeczywistość za pomocą układów równań liniowych;	K_Uo1; K_Uo7
EK_06	student wykonuje działania na wektorach i interpretuje zjawiska z wykorzystaniem pojęcia wektora;	K_Uo1
EK_07	student opisuje na różne sposoby proste, krzywe stożkowe i płaszczyzny oraz ich wzajemne położenie;	K_Uo1
EK_08	student oblicza granice ciągów i funkcji, bada ciągłość oraz wyznacza pochodne funkcji jednej zmiennej;	K_Uo7,
EK_09	student stosuje pochodne funkcji jednej zmiennej w geometrii, fizyce i technice;	K_Uo1, K_Uo7
EK_10	student oblicza całki nieoznaczone i oznaczone wykorzystując odpowiednie metody;	K_Uo7,
EK_11	student wykorzystuje całki oznaczone do zagadnień geometrycznych, fizycznych i technicznych;	K_Uo1, K_Uo7
EK_12	student wyznacza pochodne cząstkowe i wykorzystuje je do wyznaczania ekstremów lokalnych funkcji;	K_Uo7
EK_13	student oblicza różniczki zupełne i stosuje je w zagadnieniach fizycznych i technicznych;	K_Uo1, K_Uo7
EK_14	student rozwiązuje równania różniczkowe oraz opisuje zjawiska fizyczne i techniczne za pomocą równań	K_Uo1, K_Uo7

	różniczkowych;	
EK_15	student jest gotów do uznawania znaczenia stosowania metod i narzędzi matematycznych w rozwiązywaniu problemów z zakresu optyki okularowej.	K_Ko2

### 3.3. Treści programowe

#### A. Problematyka wykładu

<p>Treści merytoryczne</p> <p>Semestr 1:</p> <p><b>Liczby zespolone</b> Postać algebraiczna, trygonometryczna i wykładnicza liczby zespolonej. Działania na liczbach zespolonych. Potęgi i pierwiastki z liczb zespolonych. Rozwiązywanie równań w dziedzinie zespolonej.</p> <p><b>Macierze i wyznaczniki</b> Macierze i ich rodzaje. Działania na macierzach. Wyznaczniki i ich własności. Macierze odwrotne.</p> <p><b>Układy równań liniowych</b> Układy równań liniowych. Postać macierzowa układu równań liniowych. Wzory Cramera. Twierdzenie Kroneckera – Cappellego.</p> <p><b>Podstawowe wiadomości o wektorach</b> Wektory na płaszczyźnie i w przestrzeni, podstawowe działania na wektorach. Zastosowanie rachunku wektorowego do rozwiązywania problemów w geometrii.</p> <p><b>Przestrzeń wektorowa</b> Pojęcie przestrzeni wektorowej, przykłady. Liniowa zależność i niezależność wektorów, baza przestrzeni liniowej i jej własności, reprezentacja wektora w bazie.</p> <p><b>Elementy geometrii analitycznej</b> Proste na płaszczyźnie i proste w przestrzeni. Wzajemne położenie prostych. Płaszczyzny. Wzajemne położenie płaszczyzn. Krzywe stożkowe.</p> <p><b>Funkcje elementarne i ich własności</b> Określenie i własności funkcji. Omówienie poszczególnych funkcji elementarnych: liniowej, kwadratowej, potęgowej, wykładniczej, logarytmicznej, trygonometrycznych.</p> <p><b>Ciągi i szeregi liczbowe</b> Określenie ciągu. Monotoniczność ciągów liczbowych. Ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny. Granica ciągu. Twierdzenia o granicach. Granice podstawowych ciągów. Określenie szeregu. Zbieżność szeregu. Kryteria zbieżności dla szeregów o wyrazach nieujemnych. Szeregi naprzemienne.</p> <p><b>Granica i ciągłość funkcji</b> Pojęcie granicy funkcji. Twierdzenia o zbieżności funkcji. Obliczanie granic wybranych funkcji. Ciągłość funkcji w punkcie i na przedziale. Rodzaje punktów nieciągłości. Twierdzenia o funkcjach ciągłych i ich zastosowania.</p> <p>Semestr 2:</p> <p><b>Pochodna funkcji jednej zmiennej</b> Pojęcie pochodnej funkcji. Interpretacja geometryczna i fizyczna pochodnej. Pochodna sumy, iloczynu i ilorazu funkcji. Pochodna funkcji złożonej. Pochodna funkcji odwrotnej. Pochodne wyższych rzędów. Różniczka funkcji. Twierdzenia o wartości średniej rachunku różniczkowego. Reguła de l'Hospitala. Monotoniczność funkcji różniczkowalnych. Ekstrema lokalne funkcji różniczkowalnych. Wklęsłość i wypukłość, punkty przegięcia. Asymptoty. Badanie przebiegu zmienności funkcji.</p>
--

<p><b>Całka nieoznaczona</b>          Pojęcie funkcji pierwotnej. Całka nieoznaczona i jej własności. Tablica całek podstawowych funkcji. Wzory na całkowanie przez części i przez podstawienie. Całkowanie funkcji wymiernych, niewymiernych i trygonometrycznych.</p>
<p><b>Całka oznaczona</b>          Pojęcie całki oznaczonej. Interpretacja geometryczna całki oznaczonej. Metody wyznaczania całek oznaczonych. Zastosowania geometryczne i fizyczne.</p>
<p><b>Wybrane zagadnienia z rachunku różniczkowego funkcji wielu zmiennych</b>          Funkcje dwóch i trzech zmiennych – dziedzina, podstawowe powierzchnie – wykresy funkcji dwóch zmiennych. Pochodne cząstkowe funkcji dwóch i trzech zmiennych, płaszczyzna styczna do powierzchni. Różniczka zupełna i jej zastosowania. Ekstrema lokalne funkcji dwóch i trzech zmiennych.</p>
<p><b>Równania różniczkowe zwyczajne</b>          Zjawiska w fizyce i technice opisywane równaniami różniczkowymi. Równania o zmiennych rozdzielonych. Równania różniczkowe liniowe I rzędu, jednorodne i niejednorodne. Równania różniczkowe rzędu drugiego. Równania liniowe rzędu drugiego. Zastosowanie równań różniczkowych w technice.</p>

## B. Problematyka ćwiczeń audytoryjnych

Semestr 1:
<p><b>Liczby zespolone</b>          Przedstawianie liczb zespolonych w postaci algebraicznej, trygonometrycznej i wykładniczej. Działania na liczbach zespolonych. Potęgi i pierwiastki z liczb zespolonych. Rozwiązywanie równań w dziedzinie zespolonej.</p>
<p><b>Macierze i wyznaczniki</b>          Działania na macierzach. Obliczanie wyznaczników różnymi metodami. Wyznaczanie macierzy odwrotnych.</p>
<p><b>Układy równań liniowych</b>          Zastosowanie twierdzenia Cramera i twierdzenia Kroneckera – Cappellego do rozwiązywania układów równań liniowych. Rozwiązywanie układów równań liniowych metodą macierzy odwrotnej. Rozwiązywanie układów równań metodą eliminacji Gaussa.</p>
<p><b>Podstawowe wiadomości o wektorach</b>          Podstawowe działania na wektorach. Zastosowanie rachunku wektorowego do rozwiązywania problemów w geometrii.</p>
<p><b>Przestrzenie wektorowe</b>          Badanie liniowej zależności i niezależności wektorów. Sprawdzanie, czy układ wektorów tworzy bazę. Wyznaczanie współrzędnych wektorów w różnych bazach.</p>
<p><b>Elementy geometrii analitycznej</b>          Wyznaczanie równań prostych na płaszczyźnie i w przestrzeni. Badanie wzajemnego położenia prostych. Wyznaczanie równań płaszczyzn. Wzajemne położenie płaszczyzn. Badanie krzywych stożkowych.</p>
<p><b>Funkcje elementarne i ich własności</b>          Badanie podstawowych własności funkcji: monotoniczności, różnowartościowości, parzystości, nieparzystości, okresowości. Równania i nierówności wykładnicze, logarytmiczne, trygonometryczne.</p>
<p><b>Ciągi i szeregi liczbowe</b>          Badanie monotoniczności ciągów liczbowych. Ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny. Obliczanie granic ciągów. Badanie zbieżności szeregów liczbowych.</p>

<b>Granica i ciągłość funkcji</b> Obliczanie granic funkcji. Badanie ciągłości funkcji w punkcie i na przedziale. Określanie rodzajów punktów nieciągłości. Zastosowania twierdzeń o funkcjach ciągłych.
Semestr 2:
<b>Pochodna funkcji jednej zmiennej</b> Wyznaczanie pochodnych funkcji. Interpretacja geometryczna i fizyczna pochodnej. Zastosowania różniczek funkcji. Zastosowania twierdzeń o wartości średniej rachunku różniczkowego. Zastosowania reguły de l'Hospitala. Badanie monotoniczności i ekstremów funkcji różniczkowalnych, badanie wklęsłości, wypukłości i punktów przegięcia. Wyznaczanie asymptot. Badanie przebiegu zmienności funkcji.
<b>Całka nieoznaczona</b> Całkowanie przez podstawianie. Całkowanie przez części Całkowanie funkcji wymiernych, niewymiernych i trygonometrycznych.
<b>Całka oznaczona</b> Interpretacja geometryczna całki oznaczonej. Wyznaczanie całek oznaczonych. Zastosowania geometryczne i fizyczne całek oznaczonych.
<b>Wybrane zagadnienia z rachunku różniczkowego funkcji wielu zmiennych</b> Wyznaczanie dziedziny funkcji dwóch i trzech zmiennych. Wyznaczanie pochodnych cząstkowych funkcji dwóch i trzech zmiennych, Zastosowania różniczki zupełnej. Wyznaczanie ekstremów lokalnych funkcji dwóch i trzech zmiennych.
<b>Równania różniczkowe zwyczajne</b> Zjawiska w fizyce i technice opisywane równaniami różniczkowymi. Rozwiązywanie równań o zmiennych rozdzielonych. Rozwiązywanie równań liniowych I rzędu, jednorodnych i niejednorodnych. Rozwiązywanie wybranych równań II rzędu. Rozwiązywanie równań liniowych II rzędu Zastosowanie równań różniczkowych w technice.

### 3.4. Metody dydaktyczne

Wykład: wykład z prezentacją multimedialną

Ćwiczenia: rozwiązywanie zadań.

## 4. METODY I KRYTERIA OCENY

### 4.1. Sposoby weryfikacji efektów uczenia się

Symbol efektu	Metody oceny efektów uczenia się (np.: kolokwium, egzamin ustny, egzamin pisemny, projekt, sprawozdanie, obserwacja w trakcie zajęć)	Forma zajęć dydaktycznych (w., ćw., ...)
EK_01	egzamin – część teoretyczna, obserwacja w trakcie zajęć, testy kontrolne po każdej partii materiału (MS Teams)	wykład, ćwiczenia
EK_02	egzamin – część teoretyczna, obserwacja w trakcie zajęć, testy kontrolne po każdej partii materiału (MS Teams)	wykład, ćwiczenia
EK_03	egzamin – część teoretyczna, obserwacja w trakcie zajęć, testy kontrolne po każdej partii materiału (MS Teams)	wykład, ćwiczenia
EK_04	kolokwium, obserwacja w trakcie zajęć, egzamin – część zadaniowa	ćwiczenia

EK_05	kolokwium, obserwacja w trakcie zajęć, egzamin – część zadaniowa	ćwiczenia
EK_06	kolokwium, obserwacja w trakcie zajęć, egzamin – część zadaniowa	ćwiczenia
EK_07	kolokwium, obserwacja w trakcie zajęć, egzamin – część zadaniowa	ćwiczenia
EK_08	kolokwium, obserwacja w trakcie zajęć, egzamin – część zadaniowa	ćwiczenia
EK_09	kolokwium, obserwacja w trakcie zajęć, egzamin – część zadaniowa	ćwiczenia
EK_10	kolokwium, obserwacja w trakcie zajęć, egzamin – część zadaniowa	ćwiczenia
EK_11	kolokwium, obserwacja w trakcie zajęć, egzamin – część zadaniowa	ćwiczenia
EK_12	kolokwium, obserwacja w trakcie zajęć, egzamin – część zadaniowa	ćwiczenia
EK_13	kolokwium, obserwacja w trakcie zajęć, egzamin – część zadaniowa	ćwiczenia
EK_14	kolokwium, obserwacja w trakcie zajęć, egzamin – część zadaniowa	ćwiczenia
EK_15	obserwacja w trakcie zajęć	wykład, ćwiczenia

#### 4.2 Warunki zaliczenia przedmiotu (kryteria oceniania)

<p>Ćwiczenia – zaliczenie na ocenę po z sprawdziany pisemne w każdym semestrze, oceny cząstkowe za aktywność. Wykład – egzamin po I semestrze, egzamin po II semestrze</p> <p>Ocena z zaliczenia ćwiczeń w każdym semestrze: 75% oceny stanowią wyniki kolokwiów, 25% aktywność na zajęciach. Planowane są dwa kolokwia. Punkty uzyskane za kolokwia i aktywność są przeliczane na procenty, którym odpowiadają oceny</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- do 50% – niedostateczny,</li> <li>- 50% – 60% – dostateczny,</li> <li>- 61% – 70% – dostateczny plus,</li> <li>- 71% – 80% – dobry,</li> <li>- 81% – 90% – dobry plus,</li> <li>- 91% – 100% – bardzo dobry</li> </ul> <p>Egzaminy: Warunkiem dopuszczenia do egzaminu jest zaliczenie ćwiczeń. Egzamin odbywa się w formie pisemnej i składa się z części teoretycznej i części zadaniowej. Część teoretyczna egzaminu ma postać testu i realizowana jest przy pomocy narzędzia MS Teams (Forms). Studenci którzy uzyskają ocenę z zaliczenia ćwiczeń powyżej oceny dobrej mogą być zwolnieni z części zadaniowej – ocena z zaliczenia uznana jest wówczas jako ocena z części zadaniowej. Aby uzyskać ocenę pozytywną trzeba zaliczyć obydwie części. Studenci, którzy zaliczyli tylko jedną część egzaminu mają prawo do odpowiedzi ustnej w celu zaliczenia drugiej części. Do każdej z części stosuje się przelicznik za odpowiedni procent uzyskanych punktów:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- do 50% – niedostateczny,</li> </ul>
--

- 50% – 60% – dostateczny,
- 61% – 70% – dostateczny plus,
- 71% – 80% – dobry,
- 81% – 90% – dobry plus,
- 91% – 100% – bardzo dobry

Ocena końcowa jest średnią arytmetyczną z ocen z obydwu części.

## 5. CAŁKOWITY NAKŁAD PRACY STUDENTA POTRZEBNY DO OSIĄGNIĘCIA ZAŁOŻONYCH EFEKTÓW W GODZINACH ORAZ PUNKTACH ECTS

Forma aktywności	Średnia liczba godzin na zrealizowanie aktywności
Godziny z harmonogramu studiów	120
Inne z udziałem nauczyciela akademickiego (udział w konsultacjach, egzaminach)	10
Godziny niekontaktowe – praca własna studenta (przygotowanie do zajęć, egzaminów)	120
SUMA GODZIN	250
<b>SUMARYCZNA LICZBA PUNKTÓW ECTS</b>	<b>10</b>

\* Należy uwzględnić, że 1 pkt ECTS odpowiada 25 –30 godzin całkowitego nakładu pracy studenta.

## 6. PRAKTYKI ZAWODOWE W RAMACH PRZEDMIOTU

wymiar godzinowy	nie dotyczy
zasady i formy odbywania praktyk	nie dotyczy

## 7. LITERATURA

Literatura podstawowa:

1. Banaszek G., Gajda W., Elementy algebry liniowej, cz.1, WNT, Warszawa 2002,
2. Gdowski B., Pluciński E., Zadania z rachunku wektorowego i geometrii analitycznej, PWN, Warszawa 1982,
3. Gewert M., Skoczylas Z., Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory. Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2003,
4. Gewert M., Skoczylas Z., Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2015,
5. Gewert M., Skoczylas Z., Równania różniczkowe zwyczajne. Teoria, przykłady, zadania. Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2000,
6. Jurlewicz T., Skoczylas Z., Algebra liniowa 1: definicje, twierdzenia, wzory, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2005,
7. Jurlewicz T., Skoczylas Z., Algebra liniowa 1: przykłady i zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2005,
8. Jurlewicz T., Skoczylas Z., Algebra liniowa 2 : definicje, twierdzenia, wzory, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2005,
9. Jurlewicz T., Skoczylas Z. Algebra liniowa 2 : przykłady i zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2005,

10. Krysicki W., Włodarski L., Analiza matematyczna w zadaniach, część I i II. PWN, Warszawa 2006,
11. Szpila A., Matematyka: wybrane zagadnienia z matematyki, skrypt dla studentów kierunków technicznych, Uniwersytet Rzeszowski, Rzeszów 2013.

Literatura uzupełniająca:

1. Stankiewicz J., Wilczek K., Algebra z geometrią. Teoria, przykłady, zadania, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 2006.
2. Stankiewicz J., Wilczek K., Rachunek różniczkowy i całkowy funkcji jednej zmiennej. Teoria, przykłady, zadania, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 2002,
3. Stankiewicz J., Wilczek K., Rachunek różniczkowy i całkowy funkcji wielu zmiennych. Teoria, przykłady, zadania, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 2008.

Akceptacja Kierownika Jednostki lub osoby upoważnionej