Warszawa, 20 maja 2024

dr hab. Bogusława Karpińska, prof. PW
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska
boguslawa.karpinska@pw.edu.pl

Ocena osiągnięcia naukowego oraz aktywności naukowej dr Agnieszki Wiśniowskiej-Wajnryb w związku z postępowaniem w sprawie nadania stopnia doktora habilitowanego

Dr Agnieszka Wiśniowska-Wajnryb ukończyła studia magisterskie z matematyki w 1992 roku w Wyższej Szkole Pedagogicznej w Rzeszowie. Pracę magisterską dotyczącą funkcji gwiaździstych i ich uogólnień przygotowywała pod kierunkiem prof. Jana Stankiewicza. Pod kierunkiem tego samego promotora habilitantka przygotowywała rozprawę doktorską zatytułowaną *Obszary ograniczone stożkowymi a podklasy funkcji gwiaździstych.* Stopień doktora uzyskała w roku 1999 na Uniwersytecie Łódzkim. Dr Agnieszka Wiśniowska-Wajnryb od 1992 roku pracuje w Politechnice Rzeszowskiej, poczatkowo zatrudniona była jako asystent, a od roku uzyskania doktoratu pracuje na stanowisku adiunkta, najpierw w Katedrze Matematyki, a obecnie na Wydziale Matematyki i Fizyki Stosowanej.

Przedłożone do oceny osiągnięcie naukowe dr Agnieszki Wiśniowskiej-Wajnryb zatytułowane *Funkcje jednostajnie wypukłe i jednostajnie gwiaździste* jest zbiorem powiązanych tematycznie siedmiu prac oznaczanych jako [H1]-[H7] opublikowanych w czasopismach naukowych spełniających wymagania podane w art. 219 ust.1 pkt 2 ustawy Prawo o Szkolnictwie Wyższym i Nauce. Należy jednak zaznaczyć, że artykuł [H7] został opublikowany po złożeniu wniosku przez habilitantkę. Dwie prace są współautorskie, współautorem pracy [H2] jest J. Sokół, zaś praca [H6] została napisana wspólnie z A. Lecko. Zgodnie z art. 219 ust. 2 ustawy, w dokumentacji znajdują się oświadczenia współautorów. Z oświadczeń tych wynika, że wkład dr Agnieszki Wiśniowskiej-Wajnryb w powstanie prac [H2] i [H6] był dominujący.

Wszystkie prace wchodzące w skład przedstawionego do oceny osiągnięcia naukowego dotyczą własności funkcji analitycznych określonych na otwartym dysku jednostkowym U, a dokładniej specjalnych podklas klasy $\mathcal{S}$ funkcji uniwalentnych w U i takich, że $f(0) = 0$ oraz $f'(0) = 1$. Rozważane klasy związane są z różnymi wersjami wypukłości lub gwiaździstości, a punktem wyjścia do ich definicji są pojęcia funkcji jednostajnie wypukłych (klasa $\mathcal{UCV}$) i jednostajnie gwiaździstych (klasa $\mathcal{UST}$) wprowadzone przez A.W. Goodmana we wczesnych latach 90 i zainspirowane geometrycznym problemem dotyczącym kształtu obrazu dowolnego okręgu zawartego w dysku jednostkowym U przy funkcji gwiaździstej. Klasa $\mathcal{UCV}$ składa się z funkcji $f \in \mathcal{S}$, dla których obraz dowolnego łuku γ okręgu o środku w $\zeta \in U$ jest wypukły, zaś klasa $\mathcal{UST}$ z funkcji, dla których $f(\gamma)$ jest gwiaździsty względem $f(\zeta)$. Kilka lat poźniej,

BK

we wspólnej pracy habilitantki z S. Kanas ([5] w spisie literatury) poprzez rozszerzenie definicji Goodmana zdefiniowana została klasa funkcji k-jednostajnie wypukłych dla $k \in [0, +\infty)$, oznaczana jako k-$\mathcal{UCV}$, w następujący sposób: $f \in \mathcal{S}$ jest k-jednostajnie wypukła jeżeli każdy łuk okręgu o środku ζ, gdzie $|\zeta| \leqslant k$, wycięty przez dysk jednostkowy U jest przekształcany przez f na łuk wypukły. Modyfikacja względem definicji Goodmana polega na rozszerzeniu rozważań o łuki okręgów, których środek może leżeć poza U.

Trzy spośród prac składających się na osiągnięcie naukowe poświęcone są klasie funkcji k-$\mathcal{ST}$ zdefiniowanej w kolejnej wspólnej pracy Habilitantki z S. Kanas ([6] w spisie literatury) poprzez analogię do klasycznej relacji zachodzącej pomiędzy funkcjami wypukłymi a gwiaździstymi. Klasa k-$\mathcal{ST}$ zdefiniowana została poprzez relację $f \in k\text{-}\mathcal{UCV} \iff g \in k\text{-}\mathcal{ST}$, gdzie $g(z) = zf'(z)$. A zatem badanie własności funkcji z klasy k-$\mathcal{ST}$ sprowadza się do badania własności odpowiednich funkcji z klasy k-$\mathcal{UCV}$. Naturalne jest postawienie pytania o geometryczny sens definicji k-$\mathcal{ST}$. Krótka praca [H6] w pewnym stopniu odpowiada na to pytanie. Twierdzenie 2 z [H6] jest natychmiastową konsekwencją analitycznej charakteryzacji klasy k-$\mathcal{UCV}$ pochodzącej z pracy [6]. Bezpośrednio z tego twierdzenia autorzy wyprowadzają geometryczny wniosek dotyczący gwiaździstości obrazu zbioru będącego przecięciem dysków $U(\zeta, r)$ oraz $U(0, R)$ dla $R \leqslant 1, |\zeta| \leqslant k$ i odpowiednio dużego r.

Praca [H1] motywowana jest wynikiem Marxa z lat 30 ubiegłego wieku:

$$f \in \mathcal{ST} \implies \operatorname{Re}\sqrt{\frac{f(z)}{z}} > \tfrac{1}{2} \quad \text{dla } z \in U. \tag{1}$$

Próba bezpośredniego przeniesienia tego rezultatu na klasę k-$\mathcal{ST}$ prowadzi do słabszych oszacowań w tym sensie, że dla $k = 1$ otrzymujemy mniejszą stałą. W pracy [H1] habilitantka postawiła sobie za cel znalezienie najlepszego oszacowania analogicznego do (1) dla $f \in k$-$\mathcal{ST}$. Dowód opiera się na charakteryzacji klasy k-$\mathcal{ST}$ (z pracy [6]) za pomocą podporządkowania $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ pewnej funkcji p_k, która przekształca U na obszar ograniczony krzywą stożkową zależną od k. Otrzymane oszacowanie w terminach funkcji f_k związanej z p_k relacją $p_k(z) = \frac{zf_k'(z)}{f_k(z)}$ dla $z \in U$ jest dokładne, ale dość skomplikowane.

W pracy [H1] Habilitantka rozważa także problem znalezienia promienia największego koła $U(0, \rho(\beta)) \subset U$, w którym $\operatorname{Re}\frac{f(z)}{z} > \beta$ dla wszystkich $f \in k$-$\mathcal{ST}$. Wielkość $\rho(\beta)$ została wyznaczona w terminach funkcji f_k przy dodatkowym założeniu, że $k \geqslant 1$. Dowód wykorzystuje wypukłość funkcji $\frac{f_k(z)}{z}$ i nie przenosi się bezpośrednio na przypadek $k \in (0, 1)$, który został pozostawiony jako otwarte pytanie. W pracy [H2] napisanej wspólnie z J. Sokołem przeprowadzono bardziej szczegółową analizę własności funkcji p_k, co pozwoliło wykazać wypukłość $\frac{f_k(z)}{z}$ dla pewnych k z przedziału $(0, 1)$ i tym samym częściowo odpowiedzieć na pytanie z [H1].

Celem pracy [H5] jest wyznaczenie rzędu gwiaździstości klasy funkcji k-$\mathcal{UCV}$, tzn. supremum zbioru tych liczb α, że dla dowolnej $f \in k$-$\mathcal{UCV}$ zachodzi

$$\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} > \alpha \quad \text{dla } z \in U. \tag{2}$$

W pracy zaprezentowano dwa podejścia do tego problemu. Pierwsze jest bezpośrednią konsekwencją oszacowań z [5] i prowadzi do podania oszacowania dolnego na rząd gwiaździstości.

BG

Drugie podejście jest zdecydowanie ciekawsze, wykorzystuje co prawda znane wcześniej metody, ale pozwala wyznaczyć dokładny rząd gwiaździstości klasy k-$\mathcal{UCV}$ dla $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Praca [H3] z 2013 roku rozpoczyna badania nad nową klasą funkcji, k-jednostajnie gwiaździstych, oznaczaną jako k-$\mathcal{UST}$, zdefiniowaną poprzez analogię do definicji Goodmana funkcji jednostajnie gwiaździstych, przy czym w tym wypadku k musi być liczbą z przedziału $[0,1]$. Klasa k-$\mathcal{UST}$ to klasa „pośrednia" pomiędzy klasami funkcji gwiaździstych $\mathcal{ST}$ oraz jednostajnie gwiaździstych $\mathcal{UST}$: dla dowolnego $k \in [0,1]$ zachodzi 1-$\mathcal{UST} = \mathcal{UST} \subset k$-$\mathcal{UST} \subset \mathcal{ST} = 0$-$\mathcal{ST}$. Ze względu na wspomnianą analogię, dość naturalne wydaje się przeniesienie znanych technik na tę nową, szerszą klasę funkcji. Habilitantka szczegółowo analizuje przykłady podane przez Goodmana uogólniając je na klasę k-$\mathcal{UST}$. Uogólnia również wynik dotyczący promienia jednostajnej gwiaździstości w klasie $\mathcal{CV}$ na klasę k-$\mathcal{UST}$.

W pracy [H4] Habilitantka kontynuuje badanie funkcji k-jednostajnie gwiaździstych w kontekście następującego problemu otwartego sprzed prawie 30 lat: jakie jest największe $\alpha \geqslant 0$ takie, że każda funkcja z klasy $\mathcal{UST}$ jest gwiaździsta rzędu α tzn. zachodzi warunek (2). Habilitantka formułuje analogiczny problem dla funkcji k-jednostajnie gwiaździstych i otrzymuje interesujące twierdzenie, że nie istnieje dodatnie α takie, że każda funkcja k-jednostajnie gwiaździsta jest gwiaździsta rzędu α. W dowodzie kluczowe jest przedstawienie rozważanej klasy za pomocą zbiorów dualnych. To podejście nie prowadzi jednak do rozwiązania „starego" problemu otwartego i być może z tego względu praca nie została zauważona przez innych matematyków (jest cytowana tylko w [H7]).

Praca [H7] jest nieco inna niż pozostałe prace z osiągnięcia habilitacyjnego, których celem były uogólnienia. W pracy [H7] prosta obserwacja dotycząca znanego warunku wystarczającego na to, aby $f \in \mathcal{UST}$, pozwoliła autorce podać wiele przykładów funkcji jednostajnie gwiaździstych, innych niż te z pracy Goodmana uogólnione później w [H3]. Ponadto habilitantka wskazała interesujące przykłady pewnych podklas klasy funkcji wypukłych, które zawarte są w klasie funkcji jednostajnie gwiaździstych.

Problemy rozważane w pracach [H1]-[H7] dotyczą ciekawej tematyki związanej przede wszystkim z poszukiwaniem uniwersalnych oszacowań dla różnych podklas klas funkcji wypukłych i gwiaździstych. Uzyskane rezultaty stanowią warianty i uogólnienia klasycznych wyników. Habilitantka sprawnie stosuje różne metody, które przejrzyście opisuje w autoreferacie.

Na pozostały dorobek kandydatki składa się 19 prac opublikowanych w czasopismach różnej rangi, w większości niewielkiej, ale jest wśród nich kilka dobrych czasopism matematycznych. Większość prac dotyczy tematyki, którą habilitantka zajmuje się od początku swojej działalności naukowej, czyli funkcji gwiaździstych, ich uogólnień lub podklas. Wspomniana wcześniej praca [5]: Kanas S., Wiśniowska A, *Conic regions and k-uniform convexity*, J. Comp. Appl. Math 105 (1999), 327-336, w której zdefiniowano k-jednostajną wypukłość jest najczęściej cytowaną pracą kandydatki. Autorki podają w niej m.in analityczną charakteryzację k-jednostajnej wypukłości poprzez warunek

$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \geqslant k\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right|, \quad \text{dla } z \in U.$$

Podobnie duży oddźwięk znalazła praca: Kanas S., Wiśniowska A, *Conic domains and starlike functions*, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 45 (2000), 647-657. Prace te mają w sumie

BI

ponad 200 cytowań (według bazy MathSciNet) i miały duży wpływ na późniejsze badania kandydatki. Wśród prac nie wchodzących w skład osiągnięcia habilitacyjnego bardzo pozytywnie wyróżniają się trzy prace wspólne z B. Wajnrybem dotyczące zupełnie innej tematyki związanej z rozgałęzionymi nakryciami dysku.

Pozostałe aspekty działalności naukowej i dydaktycznej kandydatki nie budzą zastrzeżeń. Dr Agnieszka Wiśniowska-Wajnryb wygłosiła wykłady na 11 konferencjach matematycznych, w tym zagranicznych (w Bułgarii, Norwegii i na Ukrainie). Odbyła krótkie staże naukowe w innych ośrodkach. Brała udział w grancie zewnętrznym i recenzowała artykuły dla czasopism matematycznych. Wypromowała 41 prac dyplomowych i uczestniczyła w konferencjach popularyzujących matematykę.

Konkluzja

Podsumowując uważam, że badania habilitantki poszerzają i w pewnym stopniu systematyzują wiedzą w zakresie zagadnień geometrycznej teorii funkcji związanych z różnymi wariantami gwiaździstości i wypukłości. Jej rezultaty znajdują oddźwięk w środowisku matematycznym. Całokształt pracy naukowej dr Agnieszki Wiśniowskiej-Wajnryb oceniam pozytywnie. Uważam, że przedstawione osiągnięcie naukowe oraz aktywność naukowa dr Agnieszki Wiśniowskiej-Wajnryb spełniają wymagania potrzebne do uzyskania stopnia doktora habilitowanego określone w art. 219 ustawy Prawo o Szkolnictwie Wyższym i Nauce z dnia 20 lipca 2018r.

B. Karpińska