Lublin, 2 marca 2024 r.

Prof. dr hab. Maria T. Nowak
Instytut Matematyki UMCS
20-031 Lublin
Pl. M. Curie-Skłodowskiej 1

Recenzja osiągnięcia naukowego "Funkcje jednostajnie wypukłe i jednostajnie gwiaździste" oraz dorobku naukowego w postępowaniu habilitacyjnym dr Agnieszki Wiśniowskiej-Wajnryb

1. Na osiągnięcie naukowe Pani dr Agnieszki Wiśniowskiej-Wajnryb zatytułowane "Funkcje jednostajnie wypukłe i jednostajnie gwiaździste" składa się 7 prac opublikowanych w latach 2009-2024 ([H1]-[H7]). Publikacje te dotyczą geometrycznej teorii funkcji analitycznych jednej zmiennej zespolonej, a w szczególności specjalnych podklas funkcji wypukłych lub gwiaździstych w kole jednostkowym U płaszczyzny zespolonej.

Niech S oznacza klasę funkcji f jednolistnych w U z unormowaniem $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. Następnie niech ST i CV oznaczają podklasy S, których elementami są funkcje odwzorowujące U odpowiednio na obszar gwiaździsty względem zera oraz na obszar wypukły płaszczyzny zespolonej. Klasy te można opisać analitycznie:

$$ST = \left\{ f \in S : \mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0,\ z \in U \right\}$$

oraz

$$CV = \left\{ f \in S : \mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0,\ z \in U \right\}.$$

Z definicji klas ST i CV wynika, że jeśli $f \in ST$ ($f \in CV$) to dla $0 < r < 1$, $f(|z| = r)$ jest krzywą gwiaździstą względem zera (jest krzywą wypukłą). W 1991 A.W. Goodman zdefiniował klasy funkcji jednostajnie wypukłych i jednostajnie gwiaździstych $UCV \subset CV$ i $UST \subset ST$ w następujący sposób: funkcja $f \in UCV$ ($f \in UST$) jeśli obraz dowolnego łuku kołowego o środku w punkcie $\zeta \in U$, zawartego w U jest krzywą wypukłą (jest krzywą gwiaździstą względem $f(\zeta)$). Ponadto otrzymał on następujące analityczne definicje tych klas

$$UCV = \left\{ f \in S : \mathrm{Re}\left(1 + \frac{f''(z)(z-\zeta)}{f'(z)}\right) \geq 0,\ (z, \zeta) \in U \times U \right\},$$

$$UST = \left\{ f \in S : \operatorname{Re}\left(\frac{f(z) - f(\zeta)}{f'(z)(z-\zeta)} \right) \geq 0,\ (z,\zeta) \in U \times U \right\}.$$

W 1992 roku Ma i Minda otrzymali charakteryzację klasy UCV w terminach tylko jednej zmiennej z koła U

$$UCV = \left\{ f \in S : \operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \geq \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right|,\ z \in U \right\}.$$

Wykazali oni, że funkcja $f \in S$ należy do klasy UCV wtedy i tylko wtedy gdy obraz koła U poprzez funkcję $p(z) = 1 + zf''(z)/f(z)$ jest zawarty w obszarze $\Omega = \{w = u + iv : v^2 < 2u - 1\}$.

W 1999 roku S. Kanas i A. Wiśniowska zdefiniowały klasę funkcji k-jednostajnie wypukłych (k-UCV, $0 \leq k < \infty$) [J. Comput. Appl. Math. 105 (1999)]. Funkcje unormowane klasy k-UCV mają tę własność, że obraz poprzez funkcje z tej klasy każdego łuku kołowego o środku w punkcie ζ, $|\zeta| \leq k$, zawartego w kole jednostkowym U jest krzywą wypukłą. Wykorzystując metody Ma i Mindy Autorki otrzymały również następującą charakteryzację analityczną tej klasy

$$k - UCV = \left\{ f \in S : \operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \geq k \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right|,\ z \in U \right\}. \tag{1}$$

Z definicji klasy k-UCV wynika natychmiast, że UCV=1-UCV oraz CV=0-UCV. W 2000 roku S. Kanas i A. Wiśniowska korzystając z zależności pomiędzy funkcjami gwiaździstymi i wypukłymi ($zf'(z) \in ST \iff f \in CV$) wprowadziły klasę funkcji $k - ST$ w następujący sposób:

$$zf' \in k - ST \iff f \in k - UCV,$$

co wobec (1) daje analityczny warunek

$$k - ST = \left\{ f \in S : \operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right|, z \in U \right\}.$$

Klasy k-UCV oraz k-ST mają związek z odwzorowaniami konforemnymi obszarów ograniczonych krzywymi stożkowymi (np. parabolą, elipsą) na koło U. W publikacji [H1] Habilitantka razem z A. Lecko wyprowadzają własności geometryczne tej klasy. Ponadto w publikacjach [H1] i [H2] rozważane są problemy ekstremalne w klasach k-UCV oraz k-ST analogiczne do problemów ekstremalnych rozważanych wcześniej dla klas funkcji wypukłych i gwiaździstych.

W pacy [H3] Habilitantka definiuje w geometryczny sposób klasę k-UST funkcji k-jednostajnie gwiaździstych dla $k \in [0, 1]$. Funkcja $f \in S$ jest funkcją k- jednostajnie gwiaździstą ($f \in k - UST$) jeśli obraz dowolnego łuku okręgu o środku w punkcie ζ, $|\zeta| \leq k$, zawartego w U jest krzywą gwiaździstą względem punktu $f(\zeta)$. Klasę tę można łatwo opisać analitycznie:

$$k - UST = \left\{ f \in S : \mathrm{Re}\left(\frac{f(z) - f(\zeta)}{f'(z)(z - \zeta)}\right) > 0, \ z \in U, |\zeta| \leq k \right\}.$$

Znaczną część publikacji [H3] zajmuje dowód, że funkcje $f_1(z) = \frac{z}{1-Az}$ i $f_2(z) = z + Az^2$ należą do klasy k-UST wtedy i tylko wtedy gdy odpowiednio $|A| \leq \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$ i $|A| \leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4(k^2+3)}}$.

W publikacji [H4] Habilitantka wyznacza zbiór dualny względem iloczynu Hadamarda klasy k-UST. Ponadto bada ona zależność pomiędzy klasami gwiaździstymi $ST(\alpha)$ (tzn. funkcjami $f \in S$, dla których spełniony jest warunek $\mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} > \alpha$, $z \in U$, $\alpha > 0$) a klasą $k - UST$. Dowodzi ona, że dla $0 \leq k < 1$, klasa k-UST nie jest zawarta w żadnej klasie $ST(\alpha)$. Dla $k = 1$ Nezhmetdinov wykazał, że $UST \not\subset ST(\alpha)$ dla $\alpha > \alpha_0 = 0,1483\ldots$ W publikacji [H5] badany jest rząd gwiaździstości funkcji klasy $k - UCV$ dla $k \in [0, 1]$. Rząd gwiaździstości funkcji klasy UCV był badany przez R. Szása i P.A. Kupána w 2011 roku.

Publikacja [H7] dotyczy klasy $k - UST$. Habilitanka wyprowadza w tej pracy warunki dostateczne na to, by unormowana funkcja w U była funkcją jednostajnie gwiaździstą. Definiuje ona podklasy $CV(\varphi)$ funkcji wypukłych (CV). Niech φ będzie funkcją jednolistną w U spełniającą warunki: $\mathrm{Re}\varphi(z) > 0$ dla $z \in U$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) > 0$ oraz $\varphi(U)$ jest obszarem wypukłym i symetrycznym względem osi rzeczywistej. Wtedy

$$CV(\varphi) = \left\{ f \in S : 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \varphi(z) \right\}.$$

Wykorzystując twierdzenie Suffridge'a z 1970 roku, dowodzi m.in., że funkcje wypukłe rzędu 3/4 są zawarte w klasie UST.

2. Na dorobek naukowy Pani dr Agnieszki Wiśniowskiej-Wajnryb po doktoracie oprócz publikacji stanowiących osiągnięcie naukowe składa się jeszcze 5 publikacji o zbliżonej tematyce do tematyki rozprawy habilitacyjnej oraz 3 wspólne publikacje Habilitantki z profesorem Bronisławem Wajnrybem dotyczące automorfizmów rozgałęzionych nakryć dysku. Tematyka tych ostatnich prac nawiązuje do wcześniejszymi wyników Prof. Wajnryba i znacznie odbiega od klasycznej teorii funkcji jednolistnych. Ponadto w swoim dorobku Pani dr Agnieszka Wiśniowska-Wanjryb ma publikację, w której podaje elementarny dowód twierdzenia Loomisa-Whitneya. Twierdzenie to opisuje zależność pomiędzy objętością otwartego zbioru w n-wymiarowej przestrzeni

euklidesowej a $(n-1)$- wymiarowymi polami jego rzutów na hiperpłaszczyzny współrzędnych.

Przedstawiony przez Habilitantkę autoreferat jest starannie przygotowany i w sposób jasny opisuje główne wyniki zawarte w publikacjach [H1]-[H7] składających się na osiągnięcie naukowe "Funkcje jednostajnie wypukłe i jednostajnie gwiaździste". Zostały też omówione niektóre wyniki z jej pozostałych publikacji. Biorąc pod uwagę fakt, że rozprawa doktorska Pani dr Agnieszki Wiśniowskiej była zatytułowana "Obszary ograniczone stożkowymi a podklasy funkcji gwiaździstych " mam wrażenie, że tematyka jej badań naukowych jest bardzo wąska. Według MatSciNet jest ona autorką 26 publikacji, które były cytowane 285 razy (stan na 02.03.2024).

Pani dr Agnieszka Wiśniowska-Wajnryb wzięła udział w ponad 30 konferencjach matematycznych. W większości przypadków były to konferencje organizowane w na terenie Polski. Była ona również wykonawcą w projekcie badawczym Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego zatytułowanym: Grupa automorfizmów rozgałęzionego nakrycia dysku. Kierownikiem tego projektu był profesor Bronisław Wajnryb. Jak wspomniałam powyżej, jest ona współautorką trzech publikacji z tej tematyki.

Podsumowując uważam, że tematyka osiągnięcia naukowego Pani dr Agnieszki Wiśniowskie1-Wajnryb "Funkcje jednostajnie wypukłe i jednostajnie gwiaździste" nie należy do głównego nurtu badań w analizie zespolonej. Szczególnie po roku dwutysięcznym powstaje coraz mniej znaczących publikacji z tej tematyki. Można zauważyć, że po udowodnieniu hipotezy Bieberbacha w 1985 roku przez Louisa de Brangesa rozwinęła się m.in. teoria odwzorowań harmonicznych związana z powierzchniami minimalnymi oraz dynamika zespolona, w której ważną odgrywają funkcje analityczne.

Można mieć również zastrzeżenia do wymaganej ustawą aktywności naukowej Habilitanki "*realizowanej w więcej niż jednej uczelni lub instytucji naukowej, a w szczególności zagranicznej*". Moim zdaniem o tej aktywności najlepiej świadczyłyby wspólne publikacje z matematykami z innych uczelni. Jednak w dorobku Pani dr Agnieszki Wiśniowskiej-Wajnryb brak wspólnych publikacji z matematykami spoza środowiska rzeszowskiego.

Mimo wymienionych powyżej zastrzeżeń uważam, że przedstawione przez dr Agnieszkę Wiśniowską-Wajnryb osiągnięcie naukowe oraz jej pozostały dorobek naukowy spełniają w wystarczającym stopniu wymagania art.219 ustawy z dnia 20 lipca 2018 *Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce* oraz zwyczajowe wymagania stawiane kandydatom do stopnia doktora habilitowanego. W związku z tym popieram wniosek o nadanie jej stopnia doktora habilitowanego nauk matematycznych.

MNowak