Prof. dr hab. Piotr Liczberski
Instytut Matematyki
Politechniki Łódzkiej

Łódź, 25.01.2024r.

Recenzja osiągnięcia naukowego i pozostałego dorobku dr Agnieszki Wiśniowskiej-Wajnryb

## 1. Wstęp i przegląd wyników Habilitantki, opublikowanych po doktoracie

Główną część dorobku naukowego dr A.Wiśniowskiej-Wajnryb umiejscowić należy w geometrycznej teorii funkcji, która według klasycznej definicji M.Gołuzina, bada rodziny funkcji zadane przez jakąś własność geometryczną. Ograniczając się do rodziny $\mathcal{S}$ funkcji $f : U \mapsto \mathbb{C}, f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ analitycznych w kole jednostkowym $U$ płaszczyzny zespolonej $\mathbb{C}$, można przyjąć, że najbardziej znanymi w tej teorii są rodziny $\mathcal{CV}, \mathcal{ST}$, funkcji $f \in \mathcal{S}$, wypukłych i gwiaździstych.

Habilitantka należy do tych badaczy, którzy zajmowali się głównie uogólnieniami funkcji wypukłych i gwiaździstych. Kontynuowała Ona przede wszystkim linię A.W.Goodmanna, który zaproponował zastąpienie własności "okręgi o środku w zerze zawarte w $U$ są przekształcane przez te funkcje na krzywe zamknięte wypukłe (gwiaździste względem punktu $f(0) = 0$)" ogólniejszą własnością "zawarte w $U$ łuki kołowe o środkach w punktach $\zeta \in U$ są przekształcane przez te funkcje na łuki wypukłe (gwiaździste względem punktów $f(\zeta)$)". Funkcje te Goodmann nazywał jednostajnie wypukłymi a rodziny tych funkcji oznaczał przez $\mathcal{UCV}$ i odpowiednio: funkcjami jednostajnie gwiaździstymi, a ich rodziny oznaczał przez $\mathcal{UST}$ . I tak w pracy [5][1] Kanas i Wiśniowskiej-Wajnryb, z roku 1999, wprowadzone zostały klasy $k$-$\mathcal{UCV}, k \in [0, \infty]$, funkcji $k$-jednostajnie wypukłych, to jest takich $f \in \mathcal{S}$, które łuki zawarte w $U$, okręgów o środkach $\zeta, |\zeta| \le k$, przekształcają na łuki wypukłe, a później w pracy [33]≡[H3] Wiśniowskiej-Wajnryb, z roku 2013, klasy $k$-$\mathcal{UST}, k \in [0, 1]$, funkcji $k$-jednostajnie gwiaździstych, to jest takich $f \in \mathcal{S}$, które w.w. łuki przekształcają na łuki gwiaździste względem punktów $f(\zeta)$. Widać, że rozważane przez Habilitantkę rodziny $k$-$\mathcal{UCV}$ realizują "ciągłe" przejście od $\mathcal{CV}$ do $\mathcal{UCV}$, zaś rodziny $k$-$\mathcal{UST}$ od $\mathcal{ST}$ do $\mathcal{UST}$.

Z pracy [6] Kanas i Wiśniowskiej-Wajnryb z roku 2000 pochodzi definicja trzeciej grupy funkcji rozważanych w rozprawie. Są to rodziny $k$-$\mathcal{ST}, k \in [0, \infty]$, realizujące namiastkę twierdzenia typu Alexandera, to jest relacji $f \in \mathcal{CV} \Longleftrightarrow zf'(z) \in \mathcal{ST}$ (relacja $f \in \mathcal{UCV} \Longleftrightarrow zf'(z) \in \mathcal{UST}$ nie zachodzi, co pokazał Goodman). Rodziny $k$-$\mathcal{ST}, k \in [0, \infty]$, zdefiniowane są w pracy [6] następująco:

$$k\text{-}\mathcal{ST} = \{f \in \mathcal{S} : f \in k\text{-}\mathcal{UCV} \Longleftrightarrow zf'(z) \in k\text{-}\mathcal{ST}\}\,.$$

Ważniejsze własności rodzin $k$-$\mathcal{UCV}, k$-$\mathcal{UST}, k$-$\mathcal{ST}$ oraz innych rodzin rozważanych w pracach Habilitantki, opublikowanych po doktoracie, można podzielić na grupy.

**1.1.** Charakteryzacje rodzin $k$-$\mathcal{UCV}, k$-$\mathcal{UST}, k$-$\mathcal{ST}$ i innych rodzin rozważanych w autorefracie.

• $\mathbb{C}^2$- i $\mathbb{C}$-analityczne charakteryzacje rodzin $k$-$\mathcal{UCV}$: Niech $f \in \mathcal{S}, k \in [0, \infty]$. Wówczas [5]

$$\begin{aligned} f &\in k\text{-}\mathcal{UCV} \Longleftrightarrow \operatorname{Re}\left\{1 + \frac{(z-\zeta)f''(z)}{f'(z)}\right\} \ge 0, z \in U, |\zeta| \le k, \\ f &\in k\text{-}\mathcal{UCV} \Longleftrightarrow \operatorname{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > k\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right|, z \in U. \end{aligned}$$

[1] W cytowaniu $[x]$ liczba $x$ patrz "References", a raczej "Bibliografia", w cytowaniu $[x^*]$ liczba $x$ patrz "Lista publikacji nie wchodzących w skład osiągnięcia naukowego", w cytowaniu $[x^{**}]$ liczba $x$ patrz "Wykaz opublikowanych artykułów w czasopismach naukowych. Część b) Prace opublikowane po doktoracie".

- $\mathbb{C}^2$-analityczna charakteryzacja rodzin $k$-$\mathcal{UST}$: Niech $f \in \mathcal{S}, k \in [0,1]$. Wówczas [33]≡[H3]

$$f \in k\text{-}\mathcal{UST} \Longleftrightarrow \operatorname{Re}\left\{\frac{f(z)-f(\zeta)}{(z-\zeta)f'(z)}\right\} > 0, z \in U, |\zeta| \le k.$$

- $\mathbb{C}^2$- i $\mathbb{C}$-analityczne charakteryzacje rodzin $k$-$\mathcal{ST}$: Niech $f \in \mathcal{S}, k \in [0,\infty]$. Wówczas

$$\begin{aligned} f &\in k\text{-}\mathcal{ST} \Longleftrightarrow \operatorname{Re}\left\{\frac{\zeta}{z} + \frac{(z-\zeta)f'(z)}{f(z)}\right\} \ge 0, z \in U, |\zeta| \le k, ..., [8] \equiv [H6], \\ f &\in k\text{-}\mathcal{ST} \Longleftrightarrow \operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > k\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right|, z \in U, ..., [6]. \end{aligned}$$

Brak szczegółów uzasadnienia wniosku z powyższej $\mathbb{C}^2$-analitycznej charakteryzacji rodzin $k$-$\mathcal{ST}$.

- $\mathbb{C}^2$-analityczna charakteryzacja rodzin $\mathcal{S}^*(\alpha) = \left\{f \in \mathcal{S} : \left|Arg\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| < \alpha\frac{\pi}{2}, z \in U\right\}, \alpha \in (0,1]$ funkcji $\alpha$-kątowo gwiaździstych (def.- Stankiewicz, Brannan i Kirwan). Dla $f \in \mathcal{S}, k \in (0,1]$, mamy

$$f \in \mathcal{S}^*(\alpha) \Longleftrightarrow \operatorname{Re}\left\{\frac{(z-\zeta)f'(z)}{f(z)}\right\} \ge 0, z \in U, |\zeta| \le |z|\cos(\alpha\frac{\pi}{2}), [13^*].$$

- Geometryczna charakteryzacja rodzin $k$-$\mathcal{ST}$, Kanas, Wiśniowska-Wainryb [5]. Dla $k \in [0,\infty)$ :

$$f \in k\text{-}\mathcal{ST} \Longleftrightarrow \frac{zf'(z)}{f(z)} \in G_k, z \in U,$$

gdzie $G_k$ są obszarami z jedynką, których brzegiem są krzywe stożkowe

$$\left\{u + iv \in \mathbb{C} : u^2 \le k^2(u-1) + k^2v^2\right\},$$

to jest: prosta dla $k = 0$, prawa gałąź hiperboli dla $k \in (0,1)$, parabola dla $k = 1$ oraz elipsa dla $k \in (1,\infty)$. Dodajmy, że w pracy [5] funkcje jednolistne $p_k, p_k(0) = 1$, przekształcające $U$ na $G_k$, podane są wzorami jawnymi dla $k \in (0,1)$, zaś dla $k \in (1,\infty)$ za pomocą pewnej całki eliptycznej (wzór jawny dla $p_1$ podał wcześniej Rønning; przypadek $p_0$ jest oczywisty).

- Charakteryzacja rodzin $k$-$\mathcal{UST}$ poprzez splot Hadamarda $*$ funkcji analitycznych. Dla funkcji $f \in \mathcal{S}$ oraz liczb $k \in [0,1]$ mamy [33]≡[H3]:

$$f \in k\text{-}\mathcal{UST} \Longleftrightarrow \operatorname{Re}\left\{\left(f(z) * \frac{z}{(1-\alpha z)(1-kz)}\right)\left(f(z) * \frac{z}{(1-\alpha z)^2}\right)^{-1}\right\} \ge 0, z \in U, \alpha \in \overline{U}.$$

- Dualna charakteryzacja rodzin $k$-$\mathcal{UST}$ (zob. [34]≡[H4]). Rodzina $k$-$\mathcal{UST}, k \in [0,1]$, jest identyczna z dualem $\Omega_k^*$ zbioru

$$\Omega_k = \left\{f \in \mathcal{S} : f(z) = \frac{z}{2}\left(\frac{\varepsilon+1}{(1-z)^2} - \frac{\varepsilon-1}{(1-z)(1-\omega z)}\right), |\varepsilon| = 1, |\omega| = k\right\},$$

gdzie dual zbioru $V \subset \mathcal{S}$, to zbiór $V^* = \left\{g \in \mathcal{S} : \forall_{f \in V} \frac{(f*g)(z)}{z} \ne 0, z \in U\right\}$.

**1.2.** Przykłady funkcji z rodzin rozważanych przez Habilitantkę.

- $$f(z)=\frac{z}{1-cz}\in k\text{-}\mathcal{UST}, k\in[0,1]\Longleftrightarrow |c|\le\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, ..., [33]\equiv[\text{H3}].$$
- $$f(z)=z+cz^2\in k\text{-}\mathcal{UST}, k\in(0,1]\Longleftrightarrow |c|\le\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{3+k^2}}, ..., \ [33]\equiv[\text{H3}].$$
- $$f(z)=\frac{z}{(1-cz)^2}\in k\text{-}\mathcal{ST}, k\in[0,1]\Longleftrightarrow |c|\le\frac{1}{1+2k}, ..., \ [6].$$
- $f(z)=z+c_nz^n, z\in U, |c_n|\le[n(k+1)-k]^{-1}\Longleftrightarrow f\in k\text{-}\mathcal{ST}, k\in[0,1], ..., \ [6].$
- $f(z)=z+c_nz^n, z\in U, |c_n|\le\frac{1}{n}\sqrt{\frac{n+1}{n+1+(n-1)k^2}}\Longrightarrow f\in k\text{-}\mathcal{UST}, k\in[0,1], ..., \ [33]\equiv[\text{H3}].$
- $f(z)=-z-\frac{2}{c}Log(1-cz), z\in U, c\in(0,\sqrt{2}-1]\Longrightarrow f\in\mathcal{UST}, ..., \ [37]\equiv[\text{H7}].$

**1.3.** Optymalne oszacowania pewnych funkcjonałów w klasach rozważanych przez Habilitantkę,

- $$\forall_{k\in[0,\infty),z\in U}\left[f\in k\text{-}\mathcal{ST}\Longrightarrow Re\sqrt{\frac{f(z)}{z}}>\sqrt{-f_k(-1)}\right], ..., \ [32]\equiv[\text{H1}].$$
- $$\forall_{k\in[0,\infty),z\in U}\left[f\in k\text{-}\mathcal{UCV}\Longrightarrow Re\sqrt{f'(z)}>\sqrt{-f_k(-1)}\right], ..., \ [32]\equiv[\text{H1}].$$
- $$\exists_{\ k_0\in[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})}\forall_{k\in[k_0,1),|z|=r\in(0,1)}\left[f\in k\text{-}\mathcal{ST}\Longrightarrow Re\frac{f(z)}{z}>\frac{f_k(-r)}{-r}\right], ..., \ [28]\equiv[\text{H2}],$$

gdzie $\frac{zf_k'(z)}{f_k(z)}=p_k(z), z\in U.$

- $$\forall_{k\in[0,\infty),|z|=r\in(0,1)}[f\in k\text{-}\mathcal{UCV}\Longrightarrow f_k'(-r)\le|f'(z)|\le f_k'(r)], ..., [5].$$
- $$\forall_{k\in[0,\infty),|z|=r\in(0,1)}[f\in k\text{-}\mathcal{UCV}\Longrightarrow -f_k(-r)\le|f(z)|\le f_k(r)], ..., \ [5].$$

gdzie $1+\frac{zf_k''(z)}{f_k'(z)}=p_k(z), z\in U.$

**1.4.** Optymalne inkluzje między rozważanymi rodzinami funkcji.

- $k\in[0,1)\cup(1,\infty]\Longrightarrow\ k\text{-}\mathcal{UCV}\subset\mathcal{ST}(\beta), \beta=\frac{1-k}{1+k}\left[2^{\frac{2}{k+1}}\left(1-2^{\frac{k-1}{k+1}}\right)\right]^{-1}, ..., [35]\equiv[\text{H5}].$
- $$\mathcal{CV}(\alpha)\subset\mathcal{CV}(\frac{3}{4})\subset\mathcal{UST}, \alpha\in\left[\frac{3}{4},1\right), ..., [37]\equiv[\text{H7}].$$
- $$k\text{-}\mathcal{ST}\subset\mathcal{ST}(\alpha), \alpha=\frac{k}{k+1}, ..., [6],$$

gdzie

$$\mathcal{ST}(\alpha)=\left\{f\in\mathcal{S}:\mathrm{Re}\,\frac{zf'(z)}{f(z)}>\alpha, z\in U\right\}, \mathcal{CV}(\alpha)=\left\{f\in\mathcal{S}:\mathrm{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>\alpha, z\in U\right\}, \alpha\in[0,1).$$

- $$k\text{-}\mathcal{ST} \subset \mathcal{S}^*(\beta), \beta = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\arctan(\frac{1}{k}), k > 0 \\ 1, k = 0 \end{cases}, ..., [6].$$
- $$\backsim \exists_{\alpha>0} k\text{-}\mathcal{ST} \subset \mathcal{ST}(\alpha), ..., [34] \equiv [H4].$$
- $$\sup\{\alpha \in [0,1) : k\text{-}\mathcal{UCV} \subset \mathcal{ST}(\alpha)\} \geq \frac{6}{3+4\sqrt{2}}, ..., [35] \equiv [H5].$$

**1.5.** Nakrycia rozgałęzione.

Tematyka ta jest realizowana we współpracy z B. Wainrybem w związku z grantem MNiSW. Badania w tym zakresie obejmują własności nakryć rozgałęzionych $f : X \longrightarrow D$, powierzchni $X$, z brzegiem, na koło $D$. Uzyskane wyniki z prac [15*], [16*], [17*] dotyczą znalezienia generatorów grupy $H$ pewnych automorfizmów nakrycia prostego. W szczególności, w pracy [15*], znaleziono generatory takiej grupy automorfizmów dla prostych nakryć stopnia 4 koła $D$ (to jest mających 1 czterokrotny punkt rozgałęzienia lub dwa dwukrotne punkty rozgałęzienia), w pracy [16*], dla nakryć prostych dowolnego stopnia, a w [17]* dla nakryć niestandardowych.

**1.6.** Pewne zagadnienie izoperymetryczne

Tematyka ta występuje tylko w pracy [19*] i jest rozłączna z tematyką funkcji analitycznych. Math.Sci.Net. klasyfikuje ją do geometrii dyskretnej. Wynik uzyskany w pracy [19*] przez habilitantkę można zaliczyć do nierówności izoperymetrycznych. Ściślej mówiąc, dotyczy on twierdzenia Loomis'a-Whitney'a mówiącego, że w $n$-wymiarowej przestrzeni Euklidesowej $(n-1)$-potęga $n$-wymiarowej miary zbioru otwartego jest nie większa niż iloczyn $(n-1)$-wymiarowych miar rzutów tego zbioru na wszystkie $(n-1)$-wymiarowe hiperpłaszczyzny układu współrzędnych. Loomis i Whitney podali też kombinatoryczną wersję tego twierdzenia. W dowodzie posłużyli się indukcją matematyczną i nierównością Hőldera. Habilitantka podała ogólniejszą wersję kombinatoryczną. Swój dowód indukcyjny oparła na własnościach wielomianów symetrycznych oraz na nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną.

## 2. Ocena dorobku Habilitantki po doktoracie i podsumowanie

Dorobek naukowy składa się z 27 publikacji, w tym 17 po doktoracie, z czego 7 wchodzi w skład osiągnięcia naukowego (do osiągnięcia naukowego można było dołączyć jeszcze prace [5] i [6]). Część prac opatrzona jest w Math.Sci.Net. recenzjami znanych specjalistów z geometrycznej teorii funkcji. Poniżej podaję listę recenzentów z ilością ich publikacji oraz cytowań: P.Bandieri 30/76, A.Grinsphan 51/242, J.A.Hummel 33/109, T.Kaberda 49/406, D.Minda 136/1233, M.Eudave-Muñoz 47/338, R.Parvatham 64/134, F.Rønning 30/372, G.Schmeider 44/44, S.L.Shukla 43/29.

Prace wchodzące w skład osiągnięcia naukowego opublikowane są w czasopismach z listy MNiSW i posiadają niżej podaną aktualną punktację oraz impact factor: [H1] - 100/1.458, [H2] - 140/2.423, [H3] - 70/0.477, [H4] - 100/0.772, [H5] - 20/0.39, [H6] - 100/0.637, [H7] - 70/1.2.

Struktura rezultatów dr A.Wiśniowskiej-Wajnryb prezentowanych w osiągnięciu naukowym oraz pozostałych pracach opublikowanych po doktoracie zgodna jest, w dużym stopniu, ze strukturą prac klasyfikowanych w dziale 30C45 Math.Sci.Net., która zmienia się po udowodnieniu przez L.de Brangesa w 1985 roku słynnej hipotezy L.Bieberbacha.

Temayka jest aktualna, o czym świadczą ukazujące się po 1985 roku monografie z geometrycznej teorii funkcji (T.Bulboaca 2005, P.L.Duren 2012, I.Graham, G.Kohr 2003, S.Krantz 2006 oraz

R.Kühanu 2005), odbywające się cyklicznie duże konferencje międzynarodowe w Europie, Azji i Ameryce oraz publikowana duża ilość artykułów z działu 30C45.

Dorobek Habilitantki podzielony jest w Math.Sci.Net. na 3 działy: funkcje zmiennej zespolonej (23 prace cytowane 282 razy), rozmaitości zespolone (3 prace cytowane 3 razy), geometria dyskretna (1 praca). Stało się to głównie za przyczyną trzech prac współautorskich z B.Wainrybem, wykonanych w ramach 30-miesięcznego projektu badawczego własnego NN201407533, finansowanego przez MNiSW w latach 2007-2010.

Przeglądu wyników opublikowanych przez Habilitantkę po doktoracie dokonałem w pierwszej części recenzji. Wszystkie prace z osiągnięcia naukowego należą do działu 30C45, a ich uzupełnienie pracami [5] i [6] tworzy spójną całość obejmującą trzy, podobnie skonstruowane, uogólnienia jednolistnych funkcji wypukłych oraz gwiaździstych. W mojej ocenie, na uwagę zasługuje pomysł, aby dla tak powstałych rodzin funkcji $k$-$\mathcal{UCV}, k$-$\mathcal{UST}$, $k$-$\mathcal{ST}$, podać podobne $\mathbb{C}$- i $\mathbb{C}^2$-analityczne charakteryzacje. Dodajmy, że dla rodzin $k$-$\mathcal{ST}$ udało się dodatkowo podać elegancką charakteryzację geometryczną za pomocą krzywych stożkowych, zaś dla rodzin $k$-$\mathcal{UST}$ dwie charakteryzacje w języku splotu Hadamarda funkcji analitycznych. Wykorzystując te charakteryzacje, oraz inne metody, Habilitantka rozwiązała, w pracach z osiągnięcia naukowego oraz pracach [5], [6], szereg problemów ekstremalnych w rozważanych rodzinach. W ramach tych rozważań, z sukcesem, poszukiwała funkcji ekstremalnych dla badanych problemów.

Rezultaty z prac [15*], [16*], [17*], klasyfikowane przez Math.Sci.Net. do działu 57M12, zawierają interesujące wyniki związane z nakryciami rozgałęzionymi i pokazują, że Habilitantka potrafi swoje badania prowadzić poza geometryczną teorią funkcji.

Aktywność naukową Habilitantka prowadziła też w innych uczelniach i instytucjach naukowych. Wymienić tu można udział i współautorstwo wykładu w trakcie 2-tygodniowego stażu naukowego w minisemestrze Analizy Zespolonej, zorganizowanego w 1992 roku przez Międzynarodowe Centrum Banacha, oraz współpracę w 2019 roku z J.Sokołem z Uniwersytetu Rzeszowskiego, zakończoną wspólną publikacją [14*]. Szkoda, że przy omawianiu dorobku po doktoracie Habilitantka pominęła rezultaty z pracy [14*]; za to omówione są rezultaty z pracy [7**], opublikowanej przed doktoratem.

O aktywności naukowej Habilitantki zaświadcza też recenzowanie artykułów naukowych zgłoszonych do ośmiu czasopism (Fasciculi Math., J. Anal., J. Appl. Anal., J. Inequal. Appl., J. Math. Appl., Mathematica. Slovaca, Mathematische Nachrichten, RACSAM), a także dla Zentralblatt Math. 77 prac, dla Zentralblatt Prague dwóch i dla Math. Reviews jednej.

Dorobek naukowy habilitantki obejmuje też czynny udział w ponad 30 konferencjach naukowych, w tym w 15 międzynarodowych. Za aktywność naukową Habilitantka otrzymała Nagrody Rektora Politechniki Rzeszowskiej, 4-krotnie indywidualną i 3-krotnie zespołową.

Habilitantka wykazywała też dużą aktywność w zakresie dydaktyki. Była promotorem 41 oraz recenzentem 37 prac licencjackich i magisterskich na Wydziale Matematyki i Fizyki Stosowanej Politechniki Rzeszowskiej.

Na podstawie analizy przedłożonej dokumentacji **stwierdzam, że osiągnięcie naukowe i pozostały dorobek naukowy Habilitantki, stanowią znaczny wkład w rozwój dyscypliny Matematyka. Tym samym Jej osiągnięcie naukowe oraz pozostały dorobek naukowy spełniają wymagania określone w art. 219, ust. 1. ustawy z dnia 2 lipca 2018 roku Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce. Podsumowując, wnoszę o dopuszczenie pani doktor Agnieszki Wiśniowskiej-Wajnryb do dalszych etapów postępowania o nadanie Jej stopnia naukowego doktora habilitowanego w dyscyplinie Matematyka.**

**Piotr Liczberski**