Spis treści

Wiadomości wstępne

Na początku przytoczę kilka informacji i zdefiniuję kilka pojęć, które przydatne okażą się dalszej części.

DZIAŁANIA

DEFINICJA 2.1. ***Iloczynem kartezjańskim zbiorów*** A i B nazywamy zbiór uporządkowanych par elementów należących do tych zbiorów czyli zbiór postaci

$$A\times B=\{(a,b);\ a\in A,\ b\in B\}.$$

Definicję tą można uogólnić na większą ilość zbiorów w sposób następujący:

DEFINICJA 2.2. ***Iloczynem kartezjańskim zbiorów*** A, B i C nazywamy zbiór uporządkowanych trójek elementów należących do tych zbiorów czyli zbiór postaci:

$$A\times B\times C=\{(a,b,c);\ a\in A,\ b\in B,\ c\in C\}.$$

DEFINICJA 2.3. ***Iloczynem kartezjańskim zbiorów*** $A_1,A_2,\ldots,A_n$ nazywamy zbiór elementów należących do tych zbiorów uporządkowanych w ciągi skończone czyli zbiór postaci:

$$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n=\{(a_1,a_2,\ldots,a_n);\ a_1\in A_1,\ a_2\in A_2,\ldots,\ a_n\in A_n\}.$$

Dla czytelności zapisu zostaną dalej przyjęte następujące oznaczenia:

$$A^2=A\times A$$

$$A^n=\underbrace{A\times A\times\ldots\times A}_{n-razy}).$$

DEFINICJA.2.4 Odwzorowanie iloczynu kartezjańskiego ($\underbrace{A_1 \times A_2 \times ... \times A_n}_{n-razy}$), niepustych zbiorów $A_i \neq \phi$; i=1,2,…,n w niepusty zbiór A nazywamy ***działaniem n-argumentowym*** o wartościach w zbiorze A.

Elementy zbiorów A_i ; i=1,2,…,n nazywamy ***argumentami działania***.

Elementy zbioru A nazywamy ***wynikiem działania***.

Jeżeli przynajmniej jeden ze zbiorów $A_i \neq A$ to działanie nazywamy ***działaniem zewnętrznym***.

DEFINICJA.2.5 ***Działaniem wewnętrznym dwuargumentowym*** określonym w zbiorze $A \neq \phi$ nazywamy każde odwzorowanie zbioru $A \times A$ w zbiór A.

DEFINICJA.2.6 ***Działaniem wewnętrznym n-argumentowym*** określonym w zbiorze $A \neq \phi$ nazywamy każde odwzorowanie zbioru $\underbrace{A \times A \times ... \times A}_{n-razy}$ w zbiór A.

DEFINICJA.2.7 Działanie * nazywamy ***działaniem łącznym*** jeżeli:

$$\underset{a,b,c \in A}{\forall} (a * b) * c = a * (b * c).$$

DEFINICJA.2.8 Działanie * nazywamy ***działaniem przemiennym*** jeżeli:

$$\underset{a,b \in A}{\forall} (a * b) = (b * a).$$

DEFINICJA.2.9 Element $e \in A$ nazywamy ***elementem neutralnym działania*** * jeżeli:

$$\underset{a \in A}{\forall} a * e = e * a = a.$$

DEFINICJA.2.10 Mówimy, że element $a \in A$ ma ***inwers*** (czasami inwers bywa nazywany: ***elementem odwrotnym, elementem przeciwnym)*** względem, działania * jeżeli:

$$\underset{a^{-1} \in A}{\exists} a * a^{-1} = a^{-1} * a = e.$$

DEFINICJA.2.11 Parę $(G,\cdot)$ nazywamy ***grupą***, jeśli zbiór $G \neq \phi$ i działanie $\cdot : GxG \to G$ jest działaniem:

1. wewnętrznym,
2. łącznym,
3. ma element neutralny *e*.
4. każdy element zbioru G posiada element odwrotny względem działania $\cdot$.

DEFINICJA.2.12 Grupę $(G,\cdot)$ nazywamy ***grupą abelową (przemienną)***, jeśli działanie $\cdot$ jest przemienne.

DEFINICJA.2.13 Układ $(P,+,\cdot)$ nazywamy **pierścieniem**, jeśli $P \neq \phi$, działania $+,\cdot : PxP \to P$ są działaniami wewnętrznymi w P takimi, że:

1. para $(P,+)$jest grupą przemienną,
2. działanie $\cdot$ jest łączne,
3. działanie $\cdot$ **jest rozdzielne względem** $+$**,** tzn. dla wszystkich $a,b,c \in P$ zachodzi

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \wedge \quad (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

DEFINICJA.2.14 Pierścień $(P,+,\cdot)$ nazywamy **przemiennym**, jeśli działanie $\cdot$ jest przemienne.
Mówimy, że pierścień $(P,+,\cdot)$ **posiada jedynkę**, jeśli działanie $\cdot$ posiada element neutralny (ozn.1).

Uwaga. Pierścień $(\{0\},+,\cdot)$ nazywamy **trywialnym**. Jeśli pierścień nietrywialny posiada jedynkę to $1 \neq 0$.

DEFINICJA.2.15 Element $a \neq 0$ pierścienia $(P,+,\cdot)$ nazywamy **dzielnikiem zera**, jeśli istnieje taki element $b \neq 0$ w P, że $a \cdot b = b \cdot a = 0$.

DEFINICJA.2.16 Układ $(P,+,\cdot)$ nazywamy **ciałem**, jeśli P jest pierścieniem przemiennym z jedynką w którym każdy element $0 \neq a \in P$ posiada inwers względem działania $\cdot$.

TWIERDZENIE. Każde ciało jest pierścieniem całkowitym.

RELACJE

DEFINICJA.3.1 ***Relacją n-argumentową*** nazywamy dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego n zbiorów.

DEFINICJA.3.2 Relację $R \subset X \times X$ nazywamy ***zwrotną*** jeżeli $\forall_{x \in X} xRx$.

DEFINICJA.3.3 Relację $R \subset X \times X$ nazywamy ***przeciwzwrotną*** jeżeli $\forall_{x \in X} \sim (xRx)$.

DEFINICJA.3.4 Relację $R \subset X \times X$ nazywamy ***symetryczną*** jeżeli $\forall_{x,y \in X} (xRy \Rightarrow yRx)$.

DEFINICJA.3.5 Relację $R \subset X \times X$ nazywamy ***antysymetryczną*** jeżeli $\forall_{x,y \in X} [(xRy \cap yRx) \Rightarrow x = y]$.

DEFINICJA.3.6 Relację $R \subset X \times X$ nazywamy ***przeciwsymetryczną*** jeżeli $\forall_{x,y \in X} [xRy \Rightarrow \sim (yRx)]$.

DEFINICJA.3.7 Relację $R \subset X \times X$ nazywamy ***przechodnią*** jeżeli $\forall_{x,y,z \in X} [(xRy \cap yRz) \Rightarrow xRz]$.

DEFINICJA.3.8 Relację $R \subset X \times X$ nazywamy ***równoważnościową*** jeżeli jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

DEFINICJA.3.9 Relację $R \subset X \times X$ nazywamy ***relacją porządku*** lub ***relacją silnego porządku*** jeżeli jest zwrotna i przechodnia.

DEFINICJA.3.10 Relację $R \subset X \times X$ nazywamy ***relacją częściowego (słabego) porządku*** jeżeli jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia.

DEFINICJA.3.11 Niech $R \subset X \times X$ będzie relacją równoważności. ***Klasą abstrakcji (*** także ***klasą równoważności,*** lub ***warstwą) elementu x względem relacji R*** nazywamy zbiór postaci: $[x]_R = \{y \in X; yRx\}$.

PRZESTRZENIE LINIOWE

DEFINICJA.4.1 Niech $\mathbb{K}$ będzie dowolnym ciałem, X dowolnym niepustym zbiorem, w którym określono wewnętrzne działanie + dodawania elementów $+ : X \times X \to X$ oraz zewnętrzne działanie mnożenia przez elementy z ciała $\mathbb{K}$ $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$. Załóżmy, że działania te spełniają następujące warunki:

1. Dodawanie elementów zbioru X jest działaniem łącznym.
2. Dodawanie elementów zbioru X jest działaniem przemiennym.
3. Istnieje element $0 \in X$, nazywany wektorem zerowym, będący elementem neutralnym dodawania.
4. Każdy element $x \in X$ posiada swój inwers (element przeciwny do x).
5. Dla dowolnych $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ zachodzi warunek: $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$ (mnożenie przez skalar jest rozdzielne względem dodawania wektorów).
6. Dla dowolnych $x \in X$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ zachodzi warunek: $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (mnożenie przez wektor jest rozdzielne względem dodawania skalarów).
7. Dla dowolnych $x \in X$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ zachodzi warunek: $\lambda(\mu x) = (\lambda \mu)x$.(mnożenie przez skalar jest zgodne z mnożeniem skalarów).
8. Mnożenie przez skalar ma element neutralny: tj. dla dowolnego $x \in X$, zachodzi warunek: $1x = x$, gdzie 1 jest elementem neutralnym mnożenia w ciele $\mathbb{K}$.

Układ (X , $\mathbb{K}$,+,$\cdot$) z działaniami spełniającymi powyższe warunki nazywamy ***przestrzenią liniową (wektorową)***.

DEFINICJA.4.2 Przestrzeń wektorową nazywamy ***przestrzenią liniową (wektorową) rzeczywistą*** gdy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub ***przestrzenią liniową (wektorową) zespoloną*** gdy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

DEFINICJA.4.3 Elementy przestrzeni wektorowej X nazywamy ***wektorami***, element ciała $\mathbb{K}$ ***skalarami***.

DEFINICJA.4.4 Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$, $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$. Wektor postaci

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k$$

nazywamy ***kombinacją liniową*** wektorów $x_1, x_2, \ldots, x_k$ o współczynnikach $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

DEFINICJA.4.4 Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$, układ wektorów $\{x_1,x_2,\dots,x_k\} \subset X$ nazywamy ***układem liniowo niezależnym*** jeżeli dla dowolnych $\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ zachodzi warunek:

$$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\dots+\alpha_k x_k =0 \Leftrightarrow \alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_k=0.$$

DEFINICJA.4.5 Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$, układ wektorów $\{x_1,x_2,\dots,x_k\} \subset X$ nazywamy ***liniowo zależnym*** jeżeli nie jest układem liniowo niezależnym.

DEFINICJA.4.6 Niech Układ $(X, \mathbb{K}, +, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem liczb zespolonych lub rzeczywistych. Odwzorowanie $(,): X \times X \to \mathbb{K}$ nazywamy ***iloczynem skalarnym*** jeżeli spełnia następujące warunki:

1. Dla dowolnych $x, y \in X$; $(x,y) = \overline{(y,x)}$ (sprzężona symetria).
2. Dla dowolnych $x, y, z \in X,$; $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$ (rozdzielność względem dodawania).
3. Dla dowolnych $\lambda \in \mathbb{K}, x, y \in X$; $(\lambda x, y) = \lambda(x,y)$ (lewostronna jednorodność).
4. Dla dowolnego $x \in X, x \neq 0$ $(x,x) > 0$ (dodatnia określoność).

Uwaga. W rzeczywistej przestrzeni wektorowej k– wymiarowej $\mathbb{R}^k$ zwyczajowo iloczyn skalarny określa się symbolem $\circ$ i definiuje w sposób następujący

$$x \circ y = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \cdots + x_k \cdot y_k,$$

gdzie $x = (x_1,\dots,x_k)$, $y = (y_1,\dots,y_k)$

MACIERZE

DEFINICJA.5.1 Niech m, $n \geq 1$ będą liczbami naturalnymi, oznaczmy: $I = \{1,\ldots,m\}$, $J = \{1,\ldots,n\}$. Niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem zaś $A: I \times J \to X$ dowolną funkcją przyporządkowującą parom $(i, j) \in I \times J$ elementy zbioru X (tj. A: $(i, j) \to a_{ij} \in X$). ***Macierzą*** o wymiarach $m \times n$ nazywamy zbiór wartości funkcji A uporządkowany w prostokątnej tablicy:

$$A(X) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}; \qquad \text{gdzie } a_{ij} \stackrel{def}{=} A(i, j).$$

Elementy $a_{ij}; i \in I, j \in J$ nazywamy ***wyrazami macierzy***, rzędy pionowe tej tablicy nazywamy ***kolumnami macierzy*** zaś rzędy poziome ***wierszami macierzy***.

Macierze będziemy oznaczać dużymi literami A, B, itd. lub jeżeli będzie to w jakiś sposób bardziej użyteczne, przez wyraźne określenie wyrazów tych macierzy tj.: (a_{ij}).

Jeżeli będzie ważny wymiar macierzy zapiszemy to w następujący sposób: $A_{m\times n}$, $(a_{ij})_{m\times n}$.

Jeżeli będziemy chcieli zaznaczyć z jakiego zbioru pochodzą wyrazy macierzy zrobimy to następująco: $A_{m\times n}(X)$.

Symbolem $M_{m\times n}(X)$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich macierzy o wymiarach $m \times n$ i wyrazach ze zbioru X .

DEFINICJA.5.2 Niech $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(K)$ tj. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$.

Macierz $K_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \in M_{m\times 1}$ nazywamy ***j-tą kolumną macierzy*** A.

Macierz $W_i = [a_{i1}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{in}] \in M_{1\times n}$, nazywamy ***i-tym wierszem macierzy*** A .

Uwaga.. Każdy wiersz macierzy o wymiarach $m \times n$ jest ciągiem n – elementowym, każda kolumna macierzy o wymiarach $m \times n$ jest ciągiem m – elementowym. $W_i \in \mathbb{K}^n$ (wiersze to wektory przestrzeni liniowej $\mathbb{K}^n$), $K_j \in \mathbb{K}^m$ (kolumny to wektory przestrzeni liniowej $\mathbb{K}^m$). Stąd można zapisać:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_m \end{bmatrix} = [K_1, K_2, \dots, K_n].$$

DZIAŁANIA NA MACIERZACH

Niech $\mathbb{K}$ oznacza ciało liczb rzeczywistych lub zespolonych.

DEFINICJA.5.3 Niech $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$

Mówimy, że ***macierze A i B są równe*** jeżeli $a_{ij} = b_{ij}$ dla wszystkich $i \epsilon I, j \epsilon J$.

DEFINICJA.5.4 Niech $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ Macierz postaci:

$$A + B = (a_{ij+}b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$$

nazywamy ***sumą macierzy*** A i B.

Uwaga. Działanie dodawania macierzy **+:** $M_{m\times n}(\mathbb{K}) \times M_{m\times n}(\mathbb{K}) \to M_{m\times n}(\mathbb{K})$ jest działaniem wewnętrznym w zbiorze $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ tj. można do siebie dodawać tylko macierze o tym samym wymiarze. Jest to działanie łączne i przemienne. Elementem neutralnym tego działania jest macierz zerowa (każdy wyraz tej macierzy jest równy zeru). Każda macierz posiada również swój inwers względem tego działania: macierz przeciwną.

DEFINICJA.5.5 Niech $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ Macierz $-A = (-a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ nazywamy ***macierzą przeciwną*** do A.

DEFINICJA.5.6 Macierz, której każdy wyraz jest równy zeru nazywamy ***macierzą zerową***.
$(0)_{m\times n} = (v_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$; $\underset{i\in\{1,\dots,m\}}{\forall} \ \underset{j\in\{1,\dots,n\}}{\forall} v_{ij} = 0$.

DEFINICJA.5.7 Niech $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$; $\lambda \in \mathbb{K}$ Macierz $\lambda A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, gdzie:

$$\lambda \cdot A \overset{def}{=} (\lambda\, a_{ij})$$

nazywamy *iloczynem macierzy* A przez skalar λ.

Uwaga. Działanie mnożenia macierzy przez skalar $\cdot : \mathbb{K} \times M_{m\times n}(\mathbb{K}) \to M_{m\times n}(\mathbb{K})$ to działanie zewnętrzne na zbiorze $M_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Uwaga. Zachodzi równość: $-A = (-1)\cdot A$

DEFINICJA.5.8 Niech A, B $\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Macierz A-B $\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, gdzie $A - B \overset{def}{=} A + (-B)$ nazywamy ***różnicą macierzy*** A i B.

DEFINICJA.5.9 Niech $A = (a_{ij}) \in M_{m\times r}(\mathbb{K})$, $B = (b_{ij}) \in M_{r\times n}(\mathbb{K})$. Macierz $A \circ B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, gdzie:

$$A \circ B \overset{def}{=} (c_{pq}),\ \text{przy czym}\ c_{pq} \overset{def}{=} \sum_{s=1}^{r} a_{ps}\cdot b_{sq},\ \ p \in \{1, \dots, m\},\ q \in \{1, \dots, n\}$$

nazywamy ***iloczynem (składaniem) macierzy*** A i B.

$$c_{pq} = \sum_{s=1}^{r} a_{ps}\cdot b_{sq} = a_{p1}b_{1q} + a_{p2}b_{2q} + \dots + a_{pr}b_{rq}.$$

Uwaga. Działanie składania macierzy $\circ : M_{m\times r}(\mathbb{K}) \times M_{r\times n}(\mathbb{K}) \to M_{m\times n}(\mathbb{K})$ na ogół jest działaniem zewnętrznym. Na ogół nie jest też działaniem przemiennym.

Uwaga. Można ze sobą złożyć tylko macierze z których pierwsza ma tyle samo kolumn co druga wierszy.

DEFINICJA.5.10 Niech $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ Macierz $A^T = (b_{ij}) \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$, gdzie $b_{kl} = a_{lk}$, nazywamy ***macierzą transponowaną*** macierzy A.

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_{3\times 2}(R) \qquad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2\times 3}(R).$$

MACIERZ KWADRATOWA

DEFINICJA.6.1 .Macierz $A \in M_{m\times n}(K)$ nazywamy ***macierzą kwadratową***, jeśli $m = n$. Liczbę n nazywamy ***stopniem macierzy kwadratowej.***

Zbiory macierzy kwadratowych będziemy oznaczać symbolem: $M_n(K) = M_{n\times n}(K)$. Tj. $M_n(K)$ oznacza zbiór wszystkich macierzy kwadratowych stopnia n o wyrazach z ciała K.

DEFINICJA.6.2 Niech $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, $n \in N$. Ciąg $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ nazywamy ***przekątną główną macierzy kwadratowej*** A.

DEFINICJA.6.3 Niech $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, $n \in \mathbb{N}$. Ciąg $(a_{1n}, a_{2n-1}, \ldots, a_{n1})$ nazywamy ***przekątną macierzy kwadratowej*** A.

DEFINICJA.6.4 Niech $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, $n \in \mathbb{N}$. Macierz A nazywamy ***macierzą trójkątną górną***, jeśli spełniony jest następujący warunek: $\underset{i,j\in\{1,\ldots,n\}}{\forall} (i > j \Rightarrow a_{ij} = 0)$.

DEFINICJA.6.5 Niech $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, $n \in \mathbb{N}$. Macierz A nazywamy ***macierzą trójkątną dolną***, jeżeli $\underset{i,j\in\{1,\ldots,n\}}{\forall} (i < j \Rightarrow a_{ij} = 0)$.

DEFINICJA.6.6 Niech $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, $n \in \mathbb{N}$ .Macierz A nazywamy ***macierzą diagonalna (przekątniową)***, jeżeli $\underset{i,j\in\{1,\ldots,n\}}{\forall} (i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0)$.

DEFINICJA.6.7. Macierz kwadratową stopnia n nazywamy ***macierzą jednostkową*** jeżeli wszystkie wyrazy głównej przekątnej tej macierzy są równe 1, a wszystkie pozostałe 0.

$$I_n = (\delta_{ij}) \in M_n(K), n \in \mathbb{N}, \text{ gdzie } \delta_{ij} \overset{def}{=} \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}, \qquad i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

DEFINICJA.6.8 Macierz $A \in M_n(K)$, nazywamy ***macierzą odwracalną*** gdy istnieje macierz $B \in M_n(K)$, taka, że $A \circ B = B \circ A = I_n$. W przeciwnym razie macierz A będziemy nazywali ***nieodwracalną***.

WŁASNOŚCI MACIERZY

- mnożenie macierzy jest łączne, ale nie jest na ogół przemienne,
- dodawanie macierzy jest przemienne i łączne,
- jeżeli $A, B \in M_{m\times r}(K),\ C \in M_{r\times n}(K)$ to $(A+B)\circ C = A\circ C + B\circ C,$
- jeżeli $A \in M_{m\times r}(K),\ \ B, C \in M_{r\times n}(K)$ to $A\circ(B+C) = A\circ B + A\circ C,$
- jeżeli $A \in M_{m\times r}(K),\ B \in M_{r\times n}(K),\ \alpha \in K$ to $\alpha(A\circ B) = (\alpha A)\circ B = A\circ(\alpha B),$
- jeżeli $A \in M_{m\times n}(K),\ B \in M_{m\times n}(K),\ \alpha \in K$ to $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B,$
- jeżeli $A \in M_{m\times n}(K),\ \alpha, \beta \in K$ to $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A,$
- jeżeli $A, B \in M_{m\times n}(K),$ to $(A^T)^T = A$, $(A+B)^T = A^T + B^T$,
- jeżeli $A \in M_{m\times r}(K),\ \ B \in M_{r\times n}(K)$, to $(A\circ B)^T = B^T \circ A^T$,
- jeżeli $A \in M_{m\times n}(K), \alpha \in K,$ to $(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$.

WYZNACZNIKI

DEFINICJA.7.1 Niech $A \in M_n(\mathbb{K})$, n>1, i niech i, j będą liczbami naturalnymi nie większymi niż n. Symbolem A_{ki} oznaczmy macierz kwadratową stopnia n-1 powstałą z macierzy A przez skreślenie k-tego wiersza oraz i-tej kolumny.

DEFINICJA.7.2 ***Wyznacznikiem*** nazywamy funkcję przyporządkowującą każdej macierzy $A \in M_n(\mathbb{K})$, pewien element z ciała oznaczony symbolem det A i zdefiniowany następująco:

1. det$[a_{11}]$= a_{11},
2. dla n≥2 $detA = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+i}a_{ni}detA_{ni}$.

METODA SARRUSA

Niech $A \in M_n(\mathbb{K})$, wtedy jeżeli:

n=1 $\det[a_{11}] = a_{11}$

n=2 $\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

n=3 $\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$

TWIERDZENIE. Jeżeli macierz kwadratowa jest macierzą diagonalną to jej wyznacznik jest równy iloczynowi wszystkich wyrazów głównej przekątnej.

TWIERDZENIE. Jeżeli macierz kwadratowa jest macierzą trójkątną górną (dolną) to jej wyznacznik jest iloczynem wszystkich wyrazów głównej przekątnej.

TWIERDZENIE. Jeżeli macierz $A \in M_n(\mathbb{K})$, to $\det A = \det A^T$. (transpozycja nie zmienia wyznacznika).

TWIERDZENIE. *Jeżeli* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_n \end{bmatrix} = [K_1, K_2, \dots, K_n] \in M_n(\mathbb{K}), n \geq 2$.

oraz istnieją $k, l \in \{1, \dots, n\}$, $k \neq l$ i $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ takie, że $W_k = \alpha W_j$ lub $K_k = \alpha K_j$ to $\det A = 0$.

TWIERDZENIE. Pojedyncza transpozycja kolumn (wierszy) macierzy zmienia znak wyznacznika tej macierzy na przeciwny.

TWIERDZENIE. Dodawanie jednej kolumny (wiersza) przemnożonej (przemnożonego) przez skalar różny od zera do innej (innego) nie zmienia wartości wyznacznika.

TWIERDZENIE. Jeżeli przemnożymy jedną kolumnę (jeden wiersz) macierzy A przez skalar λ to wyznacznik tak otrzymanej macierzy będzie równy: $\lambda \, Det\, A$.

TWIERDZENIE. Każdą macierz kwadratową stopnia n można za pomocą operacji elementarnych na wierszach i kolumnach sprowadzić do macierzy diagonalnej.

TWIERDZENIE. Każdą macierz kwadratową stopnia n można za pomocą operacji elementarnych na wierszach sprowadzić do macierzy trójkątnej górnej.

TWIERDZENIE. Każdą macierz kwadratową stopnia n można za pomocą operacji elementarnych na kolumnach sprowadzić do macierzy trójkątnej dolnej.

DEFINICJA.7.3 Niech $A \in M_n(\mathbb{K})$, niech A_{ij} będzie macierzą kwadratową stopnia n-1 powstałą z macierzy A przez skreślenie i-tego wiersza oraz j-tej kolumny. Element z ciała skalarów postaci: $M_{ij} = (-1)^{i+j} Det\, A_{ij}$ nazywamy ***dopełnieniem algebraicznym elementu*** a_{ij} w macierzy. A

DEFINICJA.7.4 Macierz postaci $A^D = \begin{bmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1j} & \cdots & M_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ M_{i1} & \cdots & M_{ij} & \cdots & M_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & \cdots & M_{nj} & \cdots & M_{nn} \end{bmatrix}$, gdzie M_{ij} jest dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} nazywamy ***macierzą dopełnień algebraicznych*** macierzy A.

TWIERDZENIE (Laplace'a) Jeżeli $A \in M_n(\mathbb{K})$, $n \geq 2$, M_{ij} jest dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} w macierzy A to:

1. $DetA = \sum_{s=1}^{n} a_{sj} M_{sj}$,
2. . $DetA = \sum_{t=1}^{n} a_{it} M_{it}$.

TWIERDZENIE. Jeżeli $A, B \in M_n(K)$, to $Det(A \circ B) = Det\, A \cdot Det\, B$.

DEFINICJA.7.5 Macierz $A \in M_n(\mathbb{K})$ nazywamy macierzą ***odwracalną*** jeżeli istnieje macierz $A^{-1} \in M_n(\mathbb{K})$ taka że: $A \circ A^{-1} = A^{-1} \circ \mathrm{A} = I_n$. Macierz A^{-1} nazywamy ***macierzą odwrotną (inwersem)*** macierzy A

WŁASNOŚCI MACIERZY ODWRACALNYCH

TWIERDZENIE. Jeżeli $A_1, A_2 \in M_n(\mathbb{K})$, są macierzami odwracalnymi to macierz $A_1 \circ A_2$ jest odwracalna i zachodzi wzór ($A_1 \circ A_2)^{-1} = A_2^{-1} \circ A_1^{-1}$.

TWIERDZENIE. Macierz I_n jest odwracalna i $I_n^{-1} = I_n$.

Symbolem $GL\ (n, k)$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich macierzy odwracalnych stopnia n nad ciałem $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, . Para $(GL\ (n, k), \circ)$ jest grupą (ale nie grupą przemienną). Elementem neutralnym w tej grupie jest macierzI_n.

DEFINICJA.7.6. Macierz $A \in M_n(\mathbb{K})$ jest ***nieosobliwa*** jeśli $Det\, A \neq 0$.

DEFINICJA.7.7. Macierz $A \in M_n(\mathbb{K})$ jest macierzą ***osobliwą*** gdy $Det\, A = 0$.

TWIERDZENIE. Macierz kwadratowa stopnia n o wyrazach z ciała $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, jest odwracalna wtedy i tylko wtedy gdy jest nieosobliwa.

TWIERDZENIE. Macierz odwrotna do macierzy A wyraża się wzorem: $A^{-1} = \frac{1}{DetA}\left(A^D\right)^T$, gdzie A^D jest macierzą dopełnień algebraicznych macierzy A.

Uwaga. Bez wyznacznikowa metoda znajdowania macierzy odwrotnej do danej polega na wykonywaniu tych samych operacji elementarnych na **wierszach** macierzy wyjściowej oraz macierzy jednostkowej. Celem tych operacji jest sprowadzenie macierzy wyjściowej do macierzy jednostkowej. Macierz jednostkowa przechodzi wtedy na macierz odwrotną do danej pierwotnie.

RZĄD MACIERZY

DEFINICJA.7.8. Niech $A \in M_n(\mathbb{K})$, oznaczmy przez $r_k(A)$ liczbę liniowo niezależnych kolumn a przez $r_w(A)$ liczbę liniowo niezależnych wierszy. ***Rzędem macierzy*** nazywamy maksymalną liczbę liniowo niezależnych kolumn, (wierszy).

TWIERDZENIE. Jeżeli $A \in M_{n\times \mathrm{m}}(\mathbb{K})$ to:

- $0 \le r_k, \quad r_w \le \min(m,n)$,
- $r_k(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0_{[m,n]}$,
- $r_w(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0_{[m,n]}$

TWIERDZENIE. Jeżeli $A \in M_n(\mathbb{K})$, to

a) $r_k(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$

b) $r_w(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$

TWIERDZENIE. Zamiana dwóch kolumn lub dwóch wierszy miejscami nie zmienia rzędu macierzy.

TWIERDZENIE. Dodanie do kolumny innej kolumny pomnożonej przez skalar różny od zera nie zmienia rzędu macierzy.

TWIERDZENIE. Dodanie do wiersza macierzy innego wiersza pomnożonego przez skalar różny od zera nie zmienia rzędu macierzy.

UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH

Układ m równań liniowych o n niewiadomych ma postać:

$$(*)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

DEFINICJA.8.1 Układ (*) nazywamy układem ***oznaczonym*** jeżeli posiada dokładnie jedno rozwiązanie, układem ***sprzecznym*** jeżeli nie posiada rozwiązań lub układem ***nieoznaczonym*** gdy ma więcej niż jedno rozwiązanie.

Układ równań liniowych można przedstawić w prostszej postaci stosując zapis macierzowy. W tym celu przyjmijmy poniższe definicje:

DEFINICJA.8.2. Macierz $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, nazywać będziemy ***macierzą współczynników układu*** $(*)$.

DEFINICJA.8.3. Macierz $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ nazywać ***będziemy macierzą niewiadomych układu*** $(*)$.

DEFINICJA.8.4 Macierz $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ nazywać będziemy ***macierzą wyrazów wolnych układu*** (*).

DEFINICJA.8.5. Postać: $A \circ X = B$ nazywać będziemy ***postacią macierzową układu*** $(*)$.

Jeżeli $m=n$ macierz A jest macierzą kwadratową stopnia n a układ $(*)$ jest układem n równań z n niewiadomymi

Jeżeli A jest macierzą nieosobliwą to istnieje macierz do niej odwrotna: A^{-1}. Możemy więc obie strony układu równań w postaci macierzowej $A \circ X = B$ „pomnożyć" lewostronnie przez A^{-1}:

$A^{-1} \circ (A \circ X) = A^{-1} \circ B$.

Ponieważ składanie macierzy jest działaniem łącznym i jak pamiętamy $A^{-1} \circ \mathrm{A} = I_n$ *to* rozwiązanie układu przyjmie postać*:*

$$X = A^{-1} \circ B$$

DEFINICJA.8.6. Jeżeli $\det A \neq 0$ układ $(*)$ nazywamy ***układem Cramera***.

TWIERDZENIE (**Cramera).** Jeśli wyznacznik $\det A$ macierzy współczynników układu n równań liniowych o n niewiadomych jest różny od zera, to układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie określone wzorami:

$$(\#) \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{\det A_1}{\det A} \\ x_2 = \dfrac{\det A_2}{\det A} \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{\det A_n}{\det A} \end{cases}$$

; gdzie $\det A_j,\ j=1,\ldots,n$ są wyznacznikami macierzy uzyskanych z macierzy A przez zastąpienie w niej j-tej kolumny kolumną wyrazów wolnych.

DEFINICJA.8.7 Wzory $(\#)$ nazywamy ***wzorami Cramera.***

DEFINICJA.8.8 Niech $A = [a_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$; macierz

$U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$, powstałą z macierzy A przez dodanie do niej (n+1)-szej kolumny złożonej z wyrazów wolnych nazywamy ***macierzą uzupełnioną*** układu $(*)$.

TWIERDZENIE **(Koneckera – Capelliego).** Układ m równań liniowych o n niewiadomych ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy rząd macierzy współczynników przy niewiadomych jest równy rzędowi macierzy uzupełnionej tego układu tzn.:

$$rz(A) = rz(U).$$

TWIERDZENIE.

1. Jeśli $rz(A) = rz(U) = n$ (tj. rząd macierzy współczynników i uzupełnionej jest równy liczbie niewiadomych) to układ $(*)$ jest oznaczony (ma dokładnie jedno rozwiązanie).

2. Jeśli $rz(A) = rz(U) < n$ to układ (*) jest nieoznaczony (ma nieskończenie wiele rozwiązań w $\mathbb{R}$)

3. jeśli $rz(A) \neq rz(U)$ to układ $(*)$ jest sprzeczny (brak rozwiązań).

Jeśli $rz(A) = rz(U) = r < n$ układ (*) jest równoważny układowi r równań liniowych o n niewiadomych, wśród których można wybrać takie r niewiadomych, które będą niezależne od pozostałych $n-r$ zmiennych uważanych za parametry.

Przykłady

1.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2)\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot(-2) + 1\cdot 5\cdot 1 - 1\cdot(-2)\cdot(-2) - 1\cdot 5\cdot 3 - 1\cdot 1\cdot 1 =$$

$$= -6 - 2 + 5 - 4 - 15 - 1 = -23 \neq 3,$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6\cdot(-2)\cdot 1 + 4\cdot 1\cdot(-2) + 1\cdot 5\cdot 8 - 8\cdot(-2)\cdot(-2) - 1\cdot 5\cdot 6 - 4\cdot 1\cdot 1 =$$

$$= -12 - 8 + 40 - 32 - 30 - 4 = -46,$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 4\cdot 1 + 8\cdot 1\cdot(-2) + 6\cdot 5\cdot 1 - 1\cdot 4\cdot(-2) - 3\cdot 5\cdot 8 - 1\cdot 6\cdot 1 =$$

$$= 12 - 16 + 30 + 8 - 120 - 6 = -92,$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2)\cdot 8 + 1\cdot 1\cdot 6 + 1\cdot 4\cdot 1 - 1\cdot(-2)\cdot 6 - 1\cdot 4\cdot 3 - 1\cdot 1\cdot 8 =$$

$$= -48 + 6 + 4 + 12 - 12 - 8 = -46.$$

$$x_1 = \frac{-46}{-23} = 2, \qquad x_2 = \frac{-92}{-23} = 4, \qquad x_3 = \frac{-46}{-23} = 2.$$

2.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 3 \\ 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_4 = 6 \end{cases}$$

Macierz współczynników: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 7 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

macierz uzupełniona: $U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$,

macierz wyrazów wolnych $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

Obliczamy rząd macierzy współczynników:

$$rz\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 7 & 0 & 2 \end{bmatrix} \overset{w_1 + w_3}{====} rz\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 7 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 1 + rz\begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Zauważamy, że $K_1 = K_3$ wnioskujemy stąd, że $rz(A) < 4$.

Istnieje jednak niezerowy minor stopnia 3

$$M = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2)\cdot(-1) + 1\cdot 3\cdot 1 + 2\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot(-2)\cdot 0 - 3\cdot 0\cdot 3 - 1\cdot 2\cdot(-1) = 6 + 3 + 2 = 11 \neq 0$$

$\Rightarrow rz(A) = 3$.

Aby określić rząd macierzy uzupełnień U zauważamy, że czwarte równanie jest kombinacją liniową trzech pierwszych

$$w_4 = w_1 - w_2 + w_3 \qquad \Rightarrow \; rz(U) = 3.$$

Zatem układ jest nieoznaczony; minor M przyjmujemy jako bazowy i uzyskujemy układ

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 - x_4 \\ x_1 - 2x_2 = 3 - x_4 \\ 3x_2 - x_3 = 4 - 2x_4 \end{cases}$$

Niewiadoma x_4 jest niewiadomą swobodną.

Rozwiązanie przy tym podziale na niewiadome swobodne i bazowe, uzyskane przy pomocy wzorów Cramera ma postać:

$$x_1 = \frac{1}{11}\begin{vmatrix} 5-x_4 & 2 & 1 \\ 3-x_4 & -2 & 0 \\ 4-2x_4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{11}[(5-x_4)\cdot(-2)\cdot(-1) + (3-x_4)\cdot 3\cdot 1 - (4-2x_4)\cdot(-2)\cdot 1 -$$

$$-(3-x_4)\cdot 2\cdot(-1)] = \frac{1}{11}[10 - 2x_4 + 9 - 3x_4 + 8 - 4x_4 + 6 - 2x_4] = \frac{33-11x_4}{11} = 3 - x_4,$$

$$x_2 = \frac{1}{11}\begin{vmatrix} 3 & 5-x_4 & 1 \\ 1 & 3-x_4 & 0 \\ 0 & 4-2x_4 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{11}[3\cdot(3-x_4)\cdot(-1) + 1\cdot(4-2x_4)\cdot 1 - 1\cdot(5-x_4)\cdot(-1)] =$$

$$= \frac{1}{11}[-9 + 3x_4 + 4 - 2x_4 + 5 - x_4] = 0,$$

$$x_3 = \frac{1}{11}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5-x_4 \\ 1 & -2 & 3-x_4 \\ 0 & 3 & 4-2x_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{11}[3\cdot(-2)\cdot(4-2x_4) + 1\cdot 3\cdot(5-x_4) - 3\cdot(3-x_4)\cdot 3 - 1\cdot 2\cdot(4-2x_4)] =$$

$$= \frac{1}{11}[-24 + 12x_4 + 15 - 3x_4 - 27 + 9x_4 - 8 + 4x_4] = \frac{-44 + 22x_4}{11} = 2x_4 - 4,$$

Literatura:

1. A. Białynicki-Birula: Algebra liniowa z geometrią. PWN, Warszawa.

2. K. Borsuk: Geometria analityczna wielowymiarowa. PWN, Warszawa.

3. B. Gdowski, E. Pluciński: Zadania z rachunku wektorowego i geometrii analitycznej, PWN, Warszawa.

4. T. Jurlewicz, Z. Skoczylas: Algebra liniowa 1.Definicje, twierdzenia, wzory. Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2004.

5. T. Jurlewicz, Z. Skoczylas: Algebra liniowa 1. Przykłady i zadania. Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2004.

6. E. Kącki, D. Sadowski, L. Siewierski: Geometria analityczna w zadaniach. PWN, Warszawa 1988.

7. W. Krysicki, L. Włodarski : Analiza matematyczna w zadaniach cz.1, PWN, Warszawa.

8. Z. Opial: Algebra wyższa. PWN, Warszawa 1970.

9. S. Przybyło, A. Szlachtowski: Algebra i wielowymiarowa geometria analityczna w zadaniach, WNT Warszawa, wyd. 4 .